Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat (2011/12. I.)

Összesen 40 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zh-hoz 16 pontot kell elérni.

1. Feladat. (5p) Számítsuk ki az $x - \sqrt{d+1} + \sqrt{d} = 0$ feladat (d a bemenő adat, x pedig a kimenő adat) relatív kondíciószámát! Mikor lesz rosszul és mikor jól kondicionált a feladat?

2. Feladat. (5p) Határozzuk meg az alábbi $\mathbf{B}$ mátrix Cholesky-felbontását!

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 10 & 9 \\ 6 & 9 & 94 \end{bmatrix}$$

3. Feladat. (6p) Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -9 & -3 \end{bmatrix}$$

mátrix LU-felbontását és az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = [2, 12, 9]^T$ lineáris egyenletrendszer megoldását!

4. Feladat. (6p) Legyen $\|.\|$ egy tetszőleges indukált mátrixnorma. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix esetén

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{A}^k\|^{1/k} = \varrho(\mathbf{A}) \ !$$

Útmutatás: igazoljuk, hogy tetszőleges pozitív ε számhoz van olyan n_0 index, hogy minden $k > n_0$ esetén

$$\varrho(\mathbf{A}) \le \|\mathbf{A}^k\|^{1/k} \le \varrho(\mathbf{A}) + \varepsilon.$$

5. Feladat. (6p) Szimpla pontosságú lebegőpontos számokat használva (32 biten tároljuk a számokat: 1 előjelbit, 8 bit a karakterisztika és 23 bit a mantissza tárolására) szeretnénk közelíteni számítógépen a $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i^2$ sor összegét ($\pi^2/6$)! Az

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{4096^2}$$

összegre 1.6447253 adódott. Mennyivel tér el az

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2}$$

sorozat számítógépen számolt határértéke a tényleges sorösszegtől? Javasoljunk jobb módszert az összeg számítógépes közelítésére!

6. Feladat. (6p) Az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ lineáris egyenletrendszert az

$$\overline{\mathbf{x}}^{(k+1)} = (\mathbf{E} - \omega\mathbf{A})\overline{\mathbf{x}}^{(k)} + \omega\overline{\mathbf{b}}$$

iterációval szeretnénk megoldani tetszőleges $\overline{\mathbf{x}}^{(0)}$ vektorról indulva (ω tetszőleges pozitív konstans). Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ összes sajátértéke valós és az $[\alpha, \beta]$ intervallumba esik, ahol $0 < \alpha \le \beta$. Adjunk javaslatot ω megválasztására!

7. Feladat. (6p) Igazoljuk, hogy a $-4x_1 + 5x_2 = 1$, $x_1 + 2x_2 = 3$ lineáris egyenletrendszerre a Gauss-Seidel-módszer konvergálni fog (a megoldáshoz) tetszőleges kezdeti vektor esetén! Végezzünk el egy iterációs lépést a nullvektort választva kezdővektornak!