

Numerikus módszerek I. zárthelyi pótdolgozat, megoldások (2011/12. I.)

Összesen 40 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zh-hoz 16 pontot kell elérni.

1. FELADAT. (5p) Legyenek f és g differenciálható valós-valós függvények. Hogyan becsülhető az $x = f(d)$ és $x = g(d)$ feladatok kondíciós számával az $x = (f \cdot g)(d)$ feladat kondíciós száma azon d pontokban, melyekben a kondíciós szám értelmezhető? (A szokásos módon d a feladat bemenő adata és x a kimenő adat.)

Megoldás. Azokban a d pontokban, melyekben a kondíciós számok értelmezhetők

$$\kappa_{fg}(d) = \frac{|d \cdot (f \cdot g)'(d)|}{|(f \cdot g)(d)|} = \frac{|d \cdot (f'(d) \cdot g(d) + f(d) \cdot g'(d))|}{|f(d) \cdot g(d)|} \leq \kappa_f(d) + \kappa_g(d),$$

azaz a szorzat kondíciós száma a két kondíciós szám összegével becsülhető felülről.

2. FELADAT. (5p) Határozzuk meg az alábbi $\mathbf{B}$ mátrix $\mathbf{LDM}^T$ felbontását, ahol $\mathbf{L}$ és $\mathbf{M}$ normált alsó háromszögmátrixok és $\mathbf{D}$ diagonális mátrix!

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & -13 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Először meghatározzuk az LU-felbontást. $\mathbf{L}$ az LU-felbontás $\mathbf{L}$ mátrixa lesz, $\mathbf{D}$ az LU-felbontás mátrixának diagonálisa, és $\mathbf{M}^T$ a $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}$ mátrix lesz. Így azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & -13 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}^T}.$$

3. FELADAT. (6p) Igazoljuk, hogy ha egy $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}}$ lineáris egyenletrendszer jobb oldalához hozzáadunk egy $\delta\bar{\mathbf{b}}$ vektort, akkor az új egyenletrendszer $\bar{\mathbf{x}}^*$ megoldásával igaz lesz az

$$\|\bar{\mathbf{x}}^* - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\delta\bar{\mathbf{b}}\|$$

becslés, ahol a szereplő mátrixnormát a szereplő vektornorma indukálja! Ez alapján adjunk becslést arra, hogy ha az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lineáris egyenletrendszer jobb oldalán álló vektor elemeihez rendre olyan $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ számokat adunk, melyekre $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \leq 10^{-4}$, akkor maximum mekkorát változhat az egyenletrendszer megoldása 2-es normában!

Megoldás. Az $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}}$ és $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^* = \bar{\mathbf{b}} + \delta\bar{\mathbf{b}}$ egyenlőségekből kivonás után kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}^* - \bar{\mathbf{x}}) = \delta\bar{\mathbf{b}},$$

amiből

$$\bar{\mathbf{x}}^* - \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\delta\bar{\mathbf{b}}$$

adódik. Tehát

$$\|\bar{\mathbf{x}}^* - \bar{\mathbf{x}}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\delta\bar{\mathbf{b}}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\delta\bar{\mathbf{b}}\|.$$

Ezen becslés alapján, ha az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lineáris egyenletrendszer jobb oldalához hozzáadjuk az $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]^T$ vektort, akkor a megoldás megváltozása 2-es normában maximum

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \right\|_2 \left\| \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \right\|_2$$

lehet. Mivel az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix szimmetrikus, így 2-es normája megegyezik a spektrálsugarával. A

$$(1/5 - \lambda)(-1/5 - \lambda) - 4/25 = 0$$

egyenletet kell megoldani. Ennek megoldásai $\pm 1/\sqrt{5}$. Így a spektrálsugár $1/\sqrt{5}$.

A $\delta \bar{\mathbf{b}}$ vektor kettes normája $\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}$, melyre $\sqrt{2} \cdot 10^{-4}$ egy megfelelő felső becslés.

A megoldás megváltozására vonatkozó megfelelő felső becslés tehát

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-4} \approx 6.3246 \cdot 10^{-5}.$$

4. FELADAT. (6p) Az $x = 0.1$ tízes számrendszerbeli szám kettes számrendszerbeli alakja a $0.000\overline{1100}$ szakaszos tizedes tört, ahol az utolsó négy számjegy ismétlődik. Fejezzük ki az $(x - fl(x))/x$ relatív hiba értékét az u gépi pontosság segítségével, ha $fl(x)$ az x szám szimpla pontosságú lebegőpontos képe (32 biten tároljuk a számokat: 1 előjelbit, 8 bit a karakterisztika és 23 bit a mantissza tárolására)!

Megoldás: 0.1 értéke kettes számrendszerben pontosan

$$x = 1.100110011001100110011001100... \cdot 2^{-4},$$

szimpla pontosságú lebegőpontos számként (melynél a gépi pontosság $u = 2^{-24}$) pedig

$$fl(x) = 1.10011001100110011001101 \cdot 2^{-4}$$

(itt az utolsó számjegy kerekített lett). Vonjuk ki $fl(x)$ -ből x -et. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (2^{-23} - 2^{-24} - 2^{-25} - 2^{-28} - 2^{-29} - \dots) \cdot 2^{-4} &= 2^{-24}(2^{-3} - 2^{-4} - 2^{-5} - 2^{-8} - 2^{-9} - \dots) \\ &= 2^{-24}(1/8 - 1/10) = 2^{-24} \frac{1}{40} \end{aligned}$$

Emiatt

$$\frac{x - fl(x)}{x} = \frac{-2^{-24}/40}{0.1} = -\frac{1}{4}u.$$

5. FELADAT. (6p) Az $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}}$ lineáris egyenletrendszer megoldására a Gauss-Jordan eliminációs módszert alkalmazzuk (nem csak "lefelé", hanem "felfelé" is elimináljuk az oszlopokat). Adjuk meg, hogy pontosan hány lebegőpontos műveletet igényel a megoldás!

Megoldás: Legyen az együtthatómátrix $n \times n$ -es, a $\bar{\mathbf{b}}$ vektorral bővítve pedig $n \times (n+1)$ -es. A k . oszlop eliminálásakor $n - 1$ szorzótényezőt kell kiszámolnunk, majd a k . sor

$k + 1, \dots, n + 1$ elemeit ezen szorzótényezőkkel rendre beszorozva az $1, \dots, n$ sorokból (kivéve a k -at) kivonni. Ez $2(n - k + 1)$ művelet. Az elimináció tehát összesen

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (n - 1 + (n - 1)(2(n - k + 1))) &= \sum_{k=1}^{n-1} (n - 1 + 2(n^2 - 1) - 2(n - 1)k) \\ &= (n - 1)(n - 1 + 2(n^2 - 1)) - 2(n - 1) \sum_{k=1}^{n-1} k = (n - 1)(n - 1 + 2(n^2 - 1)) - (n - 1)(n - 1)n \\ &= n^3 + n^2 - 5n + 3 \end{aligned}$$

műveletet jelent. Azután már csak egy olyan egyenletrendszert kell megoldani, melynek együttthatómátrixa diagonális mátrix. Ehhez n osztásra van szükség. Így az összes műveletigény $n^3 + n^2 - 4n + 3$.

6. FELADAT. (6p) Az $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}}$ lineáris egyenletrendszert szeretnénk megoldani az $\bar{\mathbf{x}}^{(k+1)} = \bar{\mathbf{x}}^{(k)} + \alpha(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^{(k)} - \bar{\mathbf{b}})$ iterációval, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \bar{\mathbf{x}}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Adjuk meg α optimális értékét!

Megoldás: Az iterációs mátrix $\mathbf{B} = \mathbf{E} + \alpha\mathbf{A}$. Ennek a spektrálsugarát kell minimalizálni. Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei 1 és 4, így a $\mathbf{B}$ sajátértékei $1 + \alpha$ ill. $1 + 4\alpha$. α akkor optimális, ha $|1 + \alpha| = |1 + 4\alpha|$ és $\alpha \neq 0$. Ebből az optimális α -ra -0.4 adódik.

7. FELADAT. (6p) Döntsük el, hogy az $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}}$ lineáris egyenletrendszer megoldására használt Jacobi- ill. Gauss-Seidel-módszerek közül melyik lesz konvergens, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}!$$

Megoldás: A Jacobi-módszer iterációs mátrixa

$$\mathbf{B}_J = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek sajátértékei 2, és $-1 \pm \sqrt{5}$, azaz a módszer nem lesz konvergens (tetszőleges kezdővektorra).

A Gauss-Seidel-módszer iterációs mátrixa

$$\mathbf{B}_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ennek sajátértékei 0 és 2, azaz a módszer nem lesz konvergens (tetszőleges kezdővektorra).

Tehát egyik módszer sem lesz konvergens.