Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat megoldásai (2013/14. I.) S. csoport

Összesen 50 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez 20 pontot kell elérni.

1. Feladat. (4+4p) Legyen $\mathbf{A}$ egy invertálható mátrix és $\mathbf{B}$ egy olyan mátrix, mellyel teljesül, hogy $\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\| < 1$ egy $\|.\|$ vektornorma által indukált mátrixnormában! Igazoljuk, hogy tetszőleges $\overline{\mathbf{y}}$ vektorra az $F(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^{-1}\overline{\mathbf{y}}$ leképezés kontrakció a $\|.\|$ vektornormában! Ennek segítségével igazoljuk, hogy a fenti feltételek mellett a $\mathbf{B}$ mátrix is invertálható!

Megoldás. Lásd H csoport.

2. Feladat. (2+4+1 p) Adjuk meg az alábbi mátrix 1-es, 2-es és maximum normáját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}!$$

Megoldás. Mindegyik norma 7. Lásd a megoldás menetéhez a H csoportnál leírtakat.

3. Feladat. (7p) Adjunk felső becslést az előző feladat $\mathbf{A}$ mátrixának kondíciószámára maximum normában a mátrix inverzének kiszámítása nélkül!

Megoldás. 7. Lásd a H csoportnál leírtakat.

4. Feladat. (1+3+3p) Tekintsük azokat a lebegőpontos számokat, melyek 10-es alapúak, a mantissza hossza 3 és a karakterisztika -6 és 7 között változhat! Melyik a legnagyobb ábrázolható szám? Melyik a legkisebb pozitív egész szám, ami nem ábrázolható ebben a számrendszerben? Mit kapnánk a szokásos dupla pontosságú lebegőpontos számrendszerben $(2^{53}+1) - (2^{53})$ értékére (kettes számrendszer, 52 bites mantissza, 11 bites karakterisztika, 1 előjelbit)?

Megoldás. 9.99×10^7, 1001, 0 (lásd H csoport).

5. Feladat. (7p) Egy $\mathbf{A}$ mátrix rendre az alábbi $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ és $\mathbf{L}_3$ Gauss-transzformációs mátrixokkal az $\mathbf{F}$ felső háromszögmátrixba transzformálható. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrixot és adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását!

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A feltételek szerint $\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\mathbf{A} = \mathbf{F}$. Így az $\mathbf{U}$ mátrix az $\mathbf{F}$ mátrix lesz, $\mathbf{L}$ pedig az $\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_3^{-1}$mátrix, amit a tanult tételek alapján invertálás nélkül úgy kaphatunk meg, hogy $\mathbf{L}_i$ főátló alatti elemeinek -1-szereseit írjuk az $\mathbf{L}$ mátrix i-edik oszlopában a főátló alatti elem alá (a főátlóban 1-esek állnak). Azaz

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

és

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Feladat. (7p) Adjuk meg az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix Cholesky-felbontását, majd annak segítségével határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A Cholesky-felbontás $\mathbf{G}$ mátrixának elemeit az $\mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T$ egyenlőségből föntről lefelé és balról jobbra haladva határozhatjuk meg. Így kapjuk, hogy

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ezzel $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{G}^{-1})^T\mathbf{G}^{-1}$, ahol $\mathbf{G}^{-1}$ könnyen meghatározható kihasználva, hogy alsó háromszögmátrix inverze is alsó háromszögmátrix.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 14 & 5 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Feladat. (7p) Igazoljuk, hogy ha a Jacobi-módszer konvergens egy adott lineáris egyenletrendszerre, akkor a relaxált változata (JOR-módszer) is konvergens lesz $\omega \in (0, 1]$ esetén!

Megoldás. Lásd H csoport.

Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat megoldásai (2013/14. I.) H. csoport

1. Feladat. (2+4+1 p) Adjuk meg az alábbi mátrix 1-es, 2-es és maximum normáját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}!$$

Megoldás: A mindhárom norma értéke 8. Ez az 1-es és a maximum normára könnyen adódik. A 2-es normát pedig onnét kapjuk, hogy szimmetrikus mátrixokra a norma megegyezik a spektrálsugárral, a spektrálsugarat pedig könnyen megkaphatjuk a Gersgorin-tételekből. Ezekből látszik, hogy a 8 sajátérték, és a többi sajátérték abszolút értéke ennél kisebb.

2. Feladat. (7p) Adjunk felső becslést az előző feladat $\mathbf{A}$ mátrixának kondíciószámára maximum normában a mátrix inverzének kiszámítása nélkül!

Megoldás: Az előző feladatban láttuk, hogy a mátrix normája 8, és mivel a mátrix M-mátrix (hiszen a főátlón kívül nincs pozitív eleme, és a csupa egy $\overline{\mathbf{e}}$ vektor megfelel $\overline{\mathbf{g}}$ vektornak), használhatjuk az inverzük normájára vonatkozó becslést: $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \leq 1/2$. Azaz a kondíciószámra vonatkozó becslés: $\kappa_\infty(\mathbf{A}) \leq 8 \cdot (1/2) = 4$.

3. Feladat. (4+4p) Legyen $\mathbf{A}$ egy invertálható mátrix és $\mathbf{B}$ egy olyan mátrix, mellyel teljesül, hogy $\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\| < 1$ egy $\|.\|$ vektornorma által indukált mátrixnormában! Igazoljuk, hogy tetszőleges $\overline{\mathbf{y}}$ vektorra az $F(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^{-1}\overline{\mathbf{y}}$ leképezés kontrakció a $\|.\|$ vektornormában! Ennek segítségével igazoljuk, hogy a fenti feltételek mellett a $\mathbf{B}$ mátrix is invertálható!

Megoldás:

$$\|F(\overline{\mathbf{x}}_1) - F(\overline{\mathbf{x}}_2)\| = \|\overline{\mathbf{x}}_1 - \overline{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\overline{\mathbf{x}}_1 - \overline{\mathbf{x}}_2)\| = \|(\mathbf{E} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})(\overline{\mathbf{x}}_1 - \overline{\mathbf{x}}_2)\| =$$

$$= \|\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\overline{\mathbf{x}}_1 - \overline{\mathbf{x}}_2)\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|\|\overline{\mathbf{x}}_1 - \overline{\mathbf{x}}_2\|,$$

azaz valóban kontrakció a leképezés $q = \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|$ kontrakciós együtthatóval. A Banach-féle fixponttétel szerint tehát minden $\overline{\mathbf{y}}$ vektorhoz egyértelműen létezik olyan $\overline{\mathbf{x}}$ vektor, amelyre

$$\overline{\mathbf{x}} = F(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\overline{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^{-1}\overline{\mathbf{y}},$$

azaz amelyre $\mathbf{B}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$. Ez csak úgy lehet, ha $\mathbf{B}$ invertálható.

4. Feladat. (1+3+3p) Tekintsük azokat a lebegőpontos számokat, melyek 10-es alapúak, a mantissza hossza 4 és a karakterisztika -14 és 15 között változhat! Melyik a legnagyobb ábrázolható szám? Melyik a legkisebb pozitív egész szám, ami nem ábrázolható ebben a számrendszerben? Mit adna a MATLAB a $(2^{53}+2)-(2^{53}+1)$ különbség értékére (szokásos dupla pontosságú kettes alapú lebegőpontos számrendszer, 52 bites mantissza, 11 bites karakterisztika, 1 előjelbit)?

Megoldás: A legnagyobb ábrázolható szám: 9.999×10^{15}. A legkisebb nem ábrázolható pozitív egész: 10001. A MATLAB-ban a legkisebb nem ábrázolható egész $2^{53}+1$. Ugyanis az

$$1.\underbrace{1\ldots1}_{52db} \times 2^{52} = 2^{53} - 1$$

számig nyilvánvalóan minden egész számot lehet ábrázolni. A 2^{53}-t is lehet, hiszen

$$1.\underbrace{0\ldots0}_{52db} \times 2^{53} = 2^{53}.$$

Viszon $2^{53}+1$ az

$$1.\underbrace{0\ldots0}_{52db}1\times2^{53}$$

alakban lenne írható, ami nem fér bele az 52 jegyű mantisszába. Így az

$$1.\underbrace{0\ldots0}_{52db}\times2^{53}$$

számot kapnánk kerekítés után. A $2^{53}+2$ szám már újra ábrázolható a

$$1.\underbrace{0\ldots0}_{51db}1\times2^{53}$$

módon. Így a kérdéses különbségre a MATLAB 2-t fog adni.

5. Feladat. (7p) Egy $\mathbf{A}$ mátrix rendre az alábbi $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ és $\mathbf{L}_3$ Gauss-transzformációs mátrixokkal az $\mathbf{F}$ felső háromszögmátrixba transzformálható. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrixot és adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását!

$$\mathbf{L}_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix},\ \mathbf{L}_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&2&0&1\end{bmatrix},\ \mathbf{L}_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-2&1\end{bmatrix},\ \mathbf{F}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Megoldás: A feltételek szerint $\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\mathbf{A}=\mathbf{F}$. Így az $\mathbf{U}$ mátrix az $\mathbf{F}$ mátrix lesz, $\mathbf{L}$ pedig az $\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_3^{-1}$mátrix, amit a tanult tételek alapján invertálás nélkül úgy kaphatunk meg, hogy $\mathbf{L}_i$ főátló alatti elemeinek -1-szereseit írjuk az $\mathbf{L}$ mátrix i-edik oszlopában a főátló alatti elem alá (a főátlóban 1-esek állnak). Azaz

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&1&1&0\\-1&-2&2&1\end{bmatrix},$$

és

$$\mathbf{A}=\mathbf{LU}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\-1&0&0&0\\-1&0&1&1\\-1&-3&-1&0\end{bmatrix}.$$

6. Feladat. (7p) Adjuk meg az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix Cholesky-felbontását, majd annak segítségével határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét!

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&5&3\\1&3&3\end{bmatrix}$$

Megoldás: A Cholesky-felbontás $\mathbf{G}$ mátrixának elemeit az $\mathbf{A}=\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ egyenlőségből föntről lefelé és balról jobbra haladva határozhatjuk meg. Így kapjuk, hogy

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

Ezzel $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{G}^{-1})^T\mathbf{G}^{-1}$, ahol $\mathbf{G}^{-1}$ könnyen meghatározható kihasználva, hogy alsó háromszögmátrix inverze is alsó háromszögmátrix.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Feladat. (7p) Igazoljuk, hogy ha a Jacobi-módszer konvergens egy adott lineáris egyenletrendszerre, akkor a relaxált változata (JOR-módszer) is konvergens lesz $\omega \in (0,1]$ esetén!

Megoldás: Mivel a Jacobi-módszer konvergál, így

$$\varrho(\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{R})) < 1.$$

Azt kell megmutatni, hogy $\omega \in (0,1]$ esetén

$$\varrho((1-\omega)\mathbf{E} + \omega\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{R})) < 1.$$

A kérdéses mátrix sajátértékei

$$(1-\omega) + \omega\lambda_k$$

alakban írhatók, ahol λ_k $\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{R})$ sajátértékét jelöli. Így kapjuk az alábbi becslést:

$$|(1-\omega) + \omega\lambda_k| \le |1-\omega| + |\omega||\lambda_k| = 1-\omega+\omega|\lambda_k| < 1-\omega+\omega\cdot 1 = 1,$$

amelyből következik az állítás.