Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat (2014/15. I.) A. csoport

Összesen 42 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez 16 pontot kell elérni.

1. Feladat. (6p) Számítsuk ki a lehető legpontosabban $\sqrt{16.02} - 4$ értékét egy háromjegyű mantisszát és 10-es számrendszert használó számítógépen (a karakterisztikára nincs megkötés)!

2. Feladat. (6p) Igazoljuk, hogy az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltja M-mátrix, és ennek segítségével adjunk felső becslést $\|\mathbf{A}^{-1}\|_1$ értékére!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

3. Feladat. (6p) Egy invertálható $\mathbf{A}$ mátrixhoz hozzáadunk egy olyan $\mathbf{B}$ mátrixot, melyre $r := \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\| < 1$ valamilyen indukált mátrixnormában. Igazoljuk az

$$\|\mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\| \leq \frac{r}{1-r}\|\mathbf{A}^{-1}\|$$

becslést! (Útmutatás: a bal oldali zárójelben emeljünk ki $\mathbf{A}$-t, majd alkalmazzuk az $(\mathbf{E}-\mathbf{X})^{-1}$ mátrix sor alakban való előállíthatóságáról szóló tételt.)

4. Feladat. (6p) Adjuk meg az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix LDL^T és Cholesky-felbontásait!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 4 \\ -4 & 10 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}!$$

5. Feladat. (6p) A

$$\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ -x + 4y &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldására használjuk a relaxált Jacobi-iterációt $\omega = 3/4$ relaxációs paraméterrel. Az $\overline{\mathbf{x}}^{(0)} = [0,0]^T$ vektorról indítva az iterációt hány lépés után mondhatjuk már biztosan, hogy a kapott iterációs vektor 10^{-6}-nál jobban megközelíti a megoldást maximumnormában?

6. Feladat. (6p) Adjunk meg olyan $\mathbf{S}$ ortogonális mátrixot, amellyel az $\mathbf{AS}$ szorzat első sorában az első elem kivételével mindegyik elem nulla lesz! Mi lesz a második sor?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Feladat. (6p) Az

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + 7y &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert oldjuk meg a konjugált gradiens módszer segítségével. Az $\overline{\mathbf{x}}_0 = [0,0]^T$ vektorról indulva az $\overline{\mathbf{x}}_1 = [1/5, 1/5]^T$ vektorhoz jutottunk. Az eljárást tovább folytatva oldjuk meg az egyenletrendszert! ($\overline{\mathbf{x}}^{\star} = [1,0]^T$)

Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat (2014/15. I.) B. csoport

Összesen 42 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez 16 pontot kell elérni.

1. Feladat. (6p) Számítsuk ki a lehető legpontosabban $\sqrt{9.01}-3$ értékét egy háromjegyű mantisszát és 10-es számrendszert használó számítógépen (a karakterisztikára nincs megkötés)!

2. Feladat. (6p) Igazoljuk, hogy az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltja M-mátrix, és ennek segítségével adjunk felső becslést $\|\mathbf{A}^{-1}\|_1$ értékére!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Feladat. (6p) Adjuk meg az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix LDL^T és Cholesky-felbontásait!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}!$$

4. Feladat. (6p) Egy invertálható $\mathbf{A}$ mátrixhoz hozzáadunk egy olyan $\mathbf{C}$ mátrixot, melyre $s := \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\| < 1$ valamilyen indukált mátrixnormában. Igazoljuk az

$$\|\mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{A}+\mathbf{C})^{-1}\| \le \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{s}{1-s}$$

becslést! (Útmutatás: a bal oldali zárójelben emeljünk ki $\mathbf{A}$-t, majd alkalmazzuk az $(\mathbf{E}-\mathbf{X})^{-1}$ mátrix sor alakban való előállíthatóságáról szóló tételt.)

5. Feladat. (6p) A

$$\begin{aligned} 4x - y &= 3 \\ -2x + 6y &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldására használjuk a relaxált Jacobi-iterációt $\omega = 1/4$ relaxációs paraméterrel. Az $\overline{\mathbf{x}}^{(0)} = [0,0]^T$ vektorról indítva az iterációt hány lépés után mondhatjuk már biztosan, hogy a kapott iterációs vektor 10^{-6}-nál jobban megközelíti a megoldást maximumnormában?

6. Feladat. (6p) Adjunk meg olyan $\mathbf{S}$ ortogonális mátrixot, amellyel az $\mathbf{AS}$ szorzat első sorában az első elem kivételével mindegyik elem nulla lesz! Mi lesz a második sor?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Feladat. (6p) A

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 1 \\ 2x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert oldjuk meg a konjugált gradiens módszer segítségével. Az $\overline{\mathbf{x}}_0 = [0,0]^T$ vektorról indulva az $\overline{\mathbf{x}}_1 = [1/5, 1/5]^T$ vektorhoz jutottunk. Az eljárást tovább folytatva oldjuk meg az egyenletrendszert! ($\overline{\mathbf{x}}^\star = [0, 1/2]^T$)