Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat (2014/15. I.) megoldások A. csoport

1. Feladat. (6p) Számítsuk ki a lehető legpontosabban $\sqrt{16.02}-4$ értékét egy háromjegyű mantisszát és 10-es számrendszert használó számítógépen (a karakterisztikára nincs megkötés)!

Megoldás. Ha a képlet alapján számolnánk, akkor

$$\sqrt{16.02}-4 \to \sqrt{16.0}-4 = 4-4 = 0,$$

azaz 0-át adna a számítógép. ($\to$ jelöli a háromjegyű mantisszára való kerekítéseket)

Kerüljük el a kiegyszerűsödést !

$$\sqrt{16.02}-4 = \frac{16.02-16}{\sqrt{16.02}+4} = \frac{0.02}{\sqrt{16.02}+4}.$$

Számoljuk tehát ezzel a képlettel!

$$\frac{0.02}{\sqrt{16.02}+4} \to \frac{0.02}{4+4} = 0.00250.$$

Ennél pontosabb eredményt nem kaphatunk az adott számítógépen, hiszen $\sqrt{16.02}-4 = 0.002499219... \to 0.00250$.

2. Feladat. (6p) Igazoljuk, hogy az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltja M-mátrix, és ennek segítségével adjunk felső becslést $\|\mathbf{A}^{-1}\|_1$ értékére!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A főátlón kívül nincsenek pozitív értékek és a $\overline{\mathbf{g}} = [1,2,1]^T > 0$ vektorra $\mathbf{A}^T\overline{\mathbf{g}} = [2,6,4]^T > 0$. Így $\mathbf{A}^T$ valóban M-mátrix. Az M-mátrixok inverzére tanult maximumnormabeli becslésből kapjuk, hogy

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_1 = \|(\mathbf{A}^T)^{-1}\|_\infty = \frac{\|\overline{\mathbf{g}}\|_\infty}{\min(\mathbf{A}^T\overline{\mathbf{g}})} \le \frac{2}{2} = 1,$$

ahol felhasználtuk, hogy egy mátrix inverzének transzponáltja megegyezik a transzponált inverzével, és hogy az 1-es norma megegyezik a transzponált maximumnormájával.

3. Feladat. (6p) Egy invertálható $\mathbf{A}$ mátrixhoz hozzáadunk egy olyan $\mathbf{B}$ mátrixot, melyre $r := \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\| < 1$ valamilyen indukált mátrixnormában. Igazoljuk az

$$\|\mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\| \le \frac{r}{1-r}\|\mathbf{A}^{-1}\|$$

becslést! (Útmutatás: a bal oldali zárójelben emeljünk ki $\mathbf{A}$-t, majd alkalmazzuk az $(\mathbf{E}-\mathbf{X})^{-1}$ mátrix sor alakban való előállíthatóságáról szóló tételt.)

Megoldás.

$$\|\mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\| = \|\mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{A}(\mathbf{E}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}))^{-1}\| = \|\mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{E}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}^{-1}\| =$$

$$= \|(\mathbf{E} - (\mathbf{E}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1})\mathbf{A}^{-1}\|$$

Mivel $r < 1$, ezért $\varrho(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) < 1$, így $\mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ valóban invertálható (azaz $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ is az eredeti képletben). Alkalmazzuk az indukált normáról tanultakat, ill. hogy $(\mathbf{E} - \mathbf{X})^{-1} = \mathbf{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{X}^k$, ha $\mathbf{X}$ spektrálsugara 1-nél kisebb az $\mathbf{X} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ választással.

$$\|(\mathbf{E} - (\mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1})\mathbf{A}^{-1}\| = \left\| \left(\mathbf{E} - (\mathbf{E} + \sum_{k=1}^{\infty} (-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^k) \right) \mathbf{A}^{-1} \right\| =$$

$$= \left\| - \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^k \right) \mathbf{A}^{-1} \right\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} r^k \right) \|\mathbf{A}^{-1}\| = \left(\frac{1}{1-r} - 1 \right) \|\mathbf{A}^{-1}\| = \frac{r}{1-r} \|\mathbf{A}^{-1}\|.$$

Itt felhasználtuk a végtelen mértani sor összegképletét. Ezt akartuk megmutatni.

4. Feladat. (6p) Adjuk meg az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix LDL^T és Cholesky-felbontásait!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 4 \\ -4 & 10 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}!$$

Megoldás. A Cholesky-felbontást érdemes először meghatározni.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 4 \\ -4 & 10 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Innét az LDL^T felbontás:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 4 \\ -4 & 10 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Feladat. (6p) A

$$\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ -x + 4y &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldására használjuk a relaxált Jacobi-iterációt $\omega = 3/4$ relaxációs paraméterrel. Az $\overline{\mathbf{x}}^{(0)} = [0, 0]^T$ vektorról indítva az iterációt hány lépés után mondhatjuk már biztosan, hogy a kapott iterációs vektor 10^{-6}-nál jobban megközelíti a megoldást maximumnormában?

Megoldás.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 3/16 & 1/4 \end{bmatrix}, \ \overline{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 9/16 \end{bmatrix}.$$

Így $\|\mathbf{B}\|_\infty = 1/2$, továbbá $\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = [1/2, 9/16]^T$, azaz az

$$\|\overline{\mathbf{x}}^{(k)} - \overline{\mathbf{x}}^\star\|_\infty \leq \frac{(1/2)^k}{1 - 1/2} \frac{9}{16} \leq 10^{-6}$$

becslésből $k \geq 21$ megfelelő választás.

6. Feladat. (6p) Adjunk meg olyan $\mathbf{S}$ ortogonális mátrixot, amellyel az $\mathbf{AS}$ szorzat első sorában az első elem kivételével mindegyik elem nulla lesz! Mi lesz a második sor?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Mivel $(\mathbf{AS})^T = \mathbf{S}^T\mathbf{A}^T$, így látható, hogy $\mathbf{S}^T$ olyan ortogonális mátrix kell legyen, mely $\mathbf{A}^T$ első oszlopát olyan vektorba viszi, melynek elemei az első elem kivételével nullák. Így tehát $\mathbf{S}^T$-nek megfelel az $\mathbf{A}^T$ mátrix első oszlopához tartozó $\mathbf{H}$ Housholder-tükrözési mátrix. Ekkor nyilván $\mathbf{S} = \mathbf{H}$.

$\overline{\mathbf{v}} = [8, 0, 4]^T$ választással tehát az

$$\mathbf{S} = \mathbf{H} = \mathbf{E} - 2\frac{\overline{\mathbf{v}}\overline{\mathbf{v}}^T}{\overline{\mathbf{v}}^T\overline{\mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} -3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}$$

mátrix megfelelő lesz. Ekkor az $\mathbf{AS}$ mátrix második sora [2,-1,-1] lesz. (Az első pedig [-5,0,0].)

7. Feladat. (6p) Az

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + 7y &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert oldjuk meg a konjugált gradiens módszer segítségével. Az $\overline{\mathbf{x}}_0 = [0, 0]^T$ vektorról indulva az $\overline{\mathbf{x}}_1 = [1/5, 1/5]^T$ vektorhoz jutottunk. Az eljárást tovább folytatva oldjuk meg az egyenletrendszert!

Megoldás. $\overline{\mathbf{r}}_1 = \overline{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}_1 = [3/5, -3/5]^T$. Mivel $\overline{\mathbf{r}}_0 = \overline{\mathbf{p}}_1 = \overline{\mathbf{b}} = [1, 1]^T$, így $\beta_1' = \overline{\mathbf{r}}_1^T\overline{\mathbf{r}}_1/\overline{\mathbf{r}}_0^T\overline{\mathbf{r}}_0 = 9/25$. $\overline{\mathbf{p}}_2 = \overline{\mathbf{r}}_1 + \beta_1'\overline{\mathbf{p}}_1 = (6/25)[4, -1]^T$. $\alpha_2 = \cancel{(\overline{\mathbf{r}}_1^T\overline{\mathbf{p}}_1)/(\overline{\mathbf{r}}_2^T\mathbf{A}\overline{\mathbf{p}}_2)} = 5/6$, $\overline{\mathbf{x}}_2 = \overline{\mathbf{x}}_1 + \alpha_2\overline{\mathbf{p}}_2 = [1, 0]^T$. Ez már a pontos megoldás lesz.

Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat (2014/15. I.) megoldások B. csoport

Összesen 42 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez 16 pontot kell elérni.

1. Feladat. (6p) Számítsuk ki a lehető legpontosabban $\sqrt{9.01}-3$ értékét egy háromjegyű mantisszát és 10-es számrendszert használó számítógépen (a karakterisztikára nincs megkötés)!

Megoldás. Ha a képlet alapján számolnánk, akkor

$$\sqrt{9.01} - 3 \to 3.00 - 3 = 0,$$

azaz 0-át adna a számítógép. ($\to$ jelöli a háromjegyű mantisszára való kerekítéseket)

Kerüljük el a kiegyszerűsödést

$$\sqrt{9.01} - 3 = \frac{9.01 - 9}{\sqrt{9.01} + 3} = \frac{0.01}{\sqrt{9.01} + 3}.$$

Ez alapján számoljuk a kifejezés értékét!

$$\frac{0.01}{\sqrt{9.01} + 3} = \frac{0.01}{3.00166... + 3} \to \frac{0.01}{3 + 3} = 0.001666... \to 0.00167.$$

Ennél pontosabb eredményt nem kaphatunk az adott számítógépen, hiszen $\sqrt{9.01} - 3 = 0.0016662... \to 0.00167$.

2. Feladat. (6p) Igazoljuk, hogy az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltja M-mátrix, és ennek segítségével adjunk felső becslést $\|\mathbf{A}^{-1}\|_1$ értékére!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A főátlón kívül nincsenek pozitív értékek és a $\overline{\mathbf{g}} = [1, 2, 1]^T > 0$ vektorra $\mathbf{A}^T\overline{\mathbf{g}} = [1, 5, 3]^T > 0$. Így az $\mathbf{A}^T$ mátrix valóban M-mátrix. Az M-mátrixok inverzére tanult maximumnormabeli becslésből kapjuk, hogy

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_1 = \|(\mathbf{A}^T)^{-1}\|_\infty = \frac{\|\overline{\mathbf{g}}\|_\infty}{\min(\mathbf{A}^T\overline{\mathbf{g}})} \leq \frac{2}{1} = 2,$$

ahol felhasználtuk, hogy egy mátrix inverzének transzponáltja megegyezik a transzponált inverzével, és hogy az 1-es norma megegyezik a transzponált maximumnormájával.

3. Feladat. (6p) Adjuk meg az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix LDL^T és Cholesky-felbontásait!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}!$$

Megoldás. A Cholesky-felbontást érdemes először meghatározni.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Innét az LDL^T felbontás:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Feladat. (6p) Egy invertálható $\mathbf{A}$ mátrixhoz hozzáadunk egy olyan $\mathbf{C}$ mátrixot, melyre $s := \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\| < 1$ valamilyen indukált mátrixnormában. Igazoljuk az

$$\|\mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{A}+\mathbf{C})^{-1}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{s}{1-s}$$

becslést! (Útmutatás: a bal oldali zárójelben emeljünk ki $\mathbf{A}$-t, majd alkalmazzuk az $(\mathbf{E}-\mathbf{X})^{-1}$ mátrix sor alakban való előállíthatóságáról szóló tételt.)

Megoldás.

$$\|\mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{A}+\mathbf{C})^{-1}\| = \|\mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{A}(\mathbf{E}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}))^{-1}\| = \|\mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{E}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{A}^{-1}\| =$$

$$= \|(\mathbf{E} - (\mathbf{E}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})^{-1})\mathbf{A}^{-1}\|$$

Mivel $s < 1$, ezért $\varrho(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}) < 1$, így $\mathbf{E}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ valóban invertálható (azaz $\mathbf{A}+\mathbf{C}$ is az eredeti képletben). Alkalmazzuk az indukált normáról tanultakat, ill. hogy $(\mathbf{E}-\mathbf{X})^{-1} = \mathbf{E} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{X}^k$, ha $\mathbf{X}$ spektrálsugara 1-nél kisebb az $\mathbf{X} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ választással.

$$\|(\mathbf{E} - (\mathbf{E}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})^{-1})\mathbf{A}^{-1}\| = \left\| \left(\mathbf{E} - (\mathbf{E} + \sum_{k=1}^{\infty} (-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})^k) \right) \mathbf{A}^{-1} \right\| =$$

$$= \left\| - \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})^k \right) \mathbf{A}^{-1} \right\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} s^k \right) \|\mathbf{A}^{-1}\| = \left(\frac{1}{1-s} - 1 \right) \|\mathbf{A}^{-1}\| = \frac{s}{1-s} \|\mathbf{A}^{-1}\|.$$

Ahol felhasználtuk a végtelen mértani sor összegképletét is. Ezt akartuk megmutatni.

5. Feladat. (6p) A

$$\begin{aligned} 4x - y &= 3 \\ -2x + 6y &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldására használjuk a relaxált Jacobi-iterációt $\omega = 1/4$ relaxációs paraméterrel. Az $\overline{\mathbf{x}}^{(0)} = [0,0]^T$ vektorról indítva az iterációt hány lépés után mondhatjuk már biztosan, hogy a kapott iterációs vektor 10^{-6}-nál jobban megközelíti a megoldást maximumnormában?

Megoldás.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/16 \\ 1/12 & 3/4 \end{bmatrix}, \ \overline{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 3/16 \\ 1/6 \end{bmatrix}.$$

Így $\|\mathbf{B}\|_\infty = 5/6$, továbbá $\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = [3/16, 1/6]^T$, azaz az

$$\|\overline{\mathbf{x}}^{(k)} - \overline{\mathbf{x}}^\star\|_\infty \leq \frac{(5/6)^k}{1-5/6} \frac{3}{16} \leq 10^{-6}$$

becslésből $k \geq 77$ megfelelő választás.

6. Feladat. (6p) Adjunk meg olyan $\mathbf{S}$ ortogonális mátrixot, amellyel az $\mathbf{AS}$ szorzat első sorában az első elem kivételével mindegyik elem nulla lesz! Mi lesz a második sor?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Mivel $(\mathbf{AS})^T = \mathbf{S}^T\mathbf{A}^T$, így látható, hogy $\mathbf{S}^T$ olyan ortogonális mátrix kell legyen, mely $\mathbf{A}^T$ első oszlopát olyan vektorba viszi, melynek elemei az első elem kivételével nullák. Így tehát $\mathbf{S}^T$-nek megfelel az $\mathbf{A}^T$ mátrix első oszlopához tartozó $\mathbf{H}$ Housholder-tükrözési mátrix. Ekkor nyilván $\mathbf{S} = \mathbf{H}$.

$\overline{\mathbf{v}} = [9, 0, 3]^T$ választással tehát az

$$\mathbf{S} = \mathbf{H} = \mathbf{E} - 2\frac{\overline{\mathbf{v}}\overline{\mathbf{v}}^T}{\overline{\mathbf{v}}^T\overline{\mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} -4/5 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/5 & 0 & 4/5 \end{bmatrix}$$

mátrix megfelelő lesz. Ekkor az $\mathbf{AS}$ mátrix második sora [-11/5,-1,-2/5] lesz. (Az első pedig [-5,0,0].)

7. Feladat. (6p) A

$$4x + 2y = 1$$
$$2x + 2y = 1$$

egyenletrendszert oldjuk meg a konjugált gradiens módszer segítségével. Az $\overline{\mathbf{x}}_0 = [0, 0]^T$ vektorról indulva az $\overline{\mathbf{x}}_1 = [1/5, 1/5]^T$ vektorhoz jutottunk. Az eljárást tovább folytatva oldjuk meg az egyenletrendszert!

Megoldás. $\overline{\mathbf{r}}_1 = \overline{\mathbf{b}} - \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}_1 = [-1/5, 1/5]^T$. Mivel $\overline{\mathbf{r}}_0 = \overline{\mathbf{p}}_1 = \overline{\mathbf{b}} = [1, 1]^T$, így $\beta_1' = \overline{\mathbf{r}}_1^T\overline{\mathbf{r}}_1/\overline{\mathbf{r}}_0^T\overline{\mathbf{r}}_0 = 1/25$. $\overline{\mathbf{p}}_2 = \overline{\mathbf{r}}_1 + \beta_1'\overline{\mathbf{p}}_1 = (2/25)[-2, 3]^T$. $\alpha_2 = \cancel{(\overline{\mathbf{r}}_1^T\overline{\mathbf{p}}_1)/(\overline{\mathbf{r}}_2^T\mathbf{A}\overline{\mathbf{p}}_2)} = 5/4$, $\overline{\mathbf{x}}_2 = \overline{\mathbf{x}}_1 + \alpha_2\overline{\mathbf{p}}_2 = [0, 1/2]^T$. Ez már a pontos megoldás lesz.