Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat (2015/16. I.) Megoldások A. csoport

1. Feladat. (6p) A $d > 0$ paraméter felhasználásával kiszámoljuk az $x = \det(\mathbf{A})$ mennyiséget, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} d & -1 \\ 1/d^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Adjuk meg a feladat relatív kondíciószámát! Mikor lesz jól és mikor lesz rosszul kondicionált a feladat?

Megoldás: $x = d + 1/d^2 =: G(x)$, ahol $G(x)$ a megoldófüggvény. Így tehát

$$\kappa(d) = \left|\frac{G'(x)d}{G(d)}\right| = \left|\frac{(1-2/d^3)d}{d+1/d^2}\right| = \left|1 - \frac{3}{d^3+1}\right|.$$

Az abszolút értékben szereplő kifejezés mindig -2 és 1 közé esik, így $\kappa(d) \leq 2$, azaz a feladat mindig jól kondicionált, mert ez a szám kicsi.

2. Feladat. (6p) Igazoljuk, hogy az alábbi mátrix M-mátrix! (Keressük a $\overline{\mathbf{g}}$ vektort $[a, b, b, a]^T$ alakban!) Adjunk felső becslést a mátrix inverzének maximumnormájára!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A mátrixnak nincs pozitív főátlón kívüli eleme, továbbá a javasolt $\overline{\mathbf{g}}$ (nyilván pozitív elemű) vektorral $(\mathbf{A}\overline{\mathbf{g}})_1 = 3a - 2b$ és $(\mathbf{A}\overline{\mathbf{g}})_2 = 2b - 2a$. (A szimmetria miatt a másik két elem is ugyanez.) Ha tehát $a < b < 3a/2$, akkor $\mathbf{A}\overline{\mathbf{g}} > 0$. Ilyen vektor pl. a $\overline{\mathbf{g}} = [1, 1.2, 1.2, 1]^T$ vektor, melyre $\mathbf{A}\overline{\mathbf{g}} = [0.6, 0.4, 0.4, 0.6]^T$. Ebből következik, hogy a mátrix M-mátrix.

A tanult becsléssel:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\|\overline{\mathbf{g}}\|_\infty}{\min(\mathbf{A}\overline{\mathbf{g}})} = \frac{1.2}{0.4} = 3.$$

3. Feladat. (6p) Igazoljuk az alábbi állításokat négyzetes mátrixokra! $\|.\|$ egy tetszőleges indukált mátrixnormát jelent és $\mathbf{E}$ az egységmátrix.

a) Ha $\|\mathbf{E} - \mathbf{A}\| < 1$, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix invertálható.

b) Ha egy $\mathbf{A}$ mátrixhoz létezik egy olyan $\mathbf{B}$ "közelítő inverz" mátrix, melyre $\|\mathbf{E} - \mathbf{AB}\| < 1$, akkor $\mathbf{A}$ is és $\mathbf{B}$ is invertálható mátrixok.

Megoldás:

a) Ha $\varrho(\mathbf{X}) < 1$, akkor az $\mathbf{E} - \mathbf{X}$ mátrix invertálható (és inverze megegyezik az $\mathbf{E}+\mathbf{X}+\mathbf{X}^2+\ldots$ sor összegével). Ezt felhasználva: mivel $\|\mathbf{E}-\mathbf{A}\| < 1$, ezért $\varrho(\mathbf{E}-\mathbf{A}) < 1$, így az $\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{A}$ mátrix is invertálható. Ezt kellett megmutatni.

b) Az a) részből következik, hogy $\mathbf{AB}$ invertálható, de ez meg csak úgy lehet, ha mindkét mátrix invertálható. Ez látszik pl. a $0 \neq det(\mathbf{AB}) = det(\mathbf{A})\, det(\mathbf{B})$ egyenlőségből.

4. Feladat. (6p) Legyen $\mathbf{A}$ a 2. feladatban szereplő mátrix, $\tilde{\mathbf{A}}$ pedig az a mátrix, amit úgy kapunk, hogy $\mathbf{A}$ minden eleméhez hozzáadunk egy-egy 0.02-nél nem nagyobb abszolút értékű valós számot. Az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = [1, 1, 1, 1]^T$ egyenletrendszer pontos megoldása $\overline{\mathbf{x}}^\star = [2, 2.5, 2.5, 2]^T$. Legfeljebb mennyivel változhatnak meg a megoldásvektor elemei, ha az egyenletrendszerben az $\mathbf{A}$ mátrixot $\tilde{\mathbf{A}}$-ra cseréljük, és tudjuk, hogy $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = 2.5$ (ez utóbbi adattal lehet ellenőrizni a 2. feladat eredményét is)?

Megoldás: Legyen az új egyenlet megoldása $\tilde{\mathbf{x}}$. Mivel a jobb oldal nem változik a feladat során, a tanult hibabecslő képletünk az alábbi becslést adja:

$$\frac{\|\overline{\mathbf{x}}^\star - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\overline{\mathbf{x}}^\star\|_\infty} \leq \frac{\kappa_\infty(\mathbf{A})}{1 - \kappa_\infty(\mathbf{A})\|\delta\mathbf{A}\|_\infty/\|\mathbf{A}\|_\infty} \frac{\|\delta\mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty} = 0.25,$$

mivel $\|\mathbf{A}\|_\infty = 6$, $\kappa_\infty(\mathbf{A}) = 6 \cdot 2.5$ és $\|\delta\mathbf{A}\|_\infty = 0.08$. Továbbá $\|\overline{\mathbf{x}}^\star\|_\infty = 2.5$ miatt

$$\|\overline{\mathbf{x}}^\star - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty \leq 2.5 \cdot 0.25 = 0.625.$$

Tehát 0.625-nél nem térhetnek el jobban az elemek.

5. Feladat. (6p) Határozzuk meg az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Feladat. (6p) A 7. feladatban szereplő egyenletrendszert szeretnénk megoldani a relaxált Gauss–Seidel-iterációval. Melyik ω választás vezet konvergens módszerre az $\omega = 1/2$ és $\omega = 5/2$ értékek közül? Az $\overline{\mathbf{x}}_0 = [0,0]^T$ vektorról indítva a konvergens iterációt, hány lépés után mondhatjuk már biztosan, hogy a kapott iterációs vektor 10^{-10}-nél jobban megközelíti a megoldást maximumnormában?

Megoldás: A 7. feladatban adott egyenletrendszer mátrixa szimmetrikus pozitív definit (csak ilyenekre lehet ugyanis a gradiens módszert közvetlenül alkalmazni). Az ilyen mátrixokra a relaxált Gauss–Seidel-módszer csak pontosan a $(0,2)$ intervallumbeli ω értékekre lesz konvergens. Így az $\omega = 1/2$ választás lesz csak jó.

Így az iteráció alakja

$$\overline{\mathbf{x}}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4/8 & 2/8 \\ 2/8 & 5/8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \overline{\mathbf{x}}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 2/8 \\ 5/8 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{f}}},$$

ahonnét $\overline{\mathbf{x}}_0 = [0,0]^T$ miatt $\overline{\mathbf{x}}_1 = [2/8, 5/8]^T$, és $\|\mathbf{B}\|_\infty = 7/8$. Ebből a hibabecslés

$$\|\overline{\mathbf{x}}_k - \overline{\mathbf{x}}^\star\|_\infty \leq \frac{(7/8)^k}{1/8} \frac{5}{8} \leq 10^{-10},$$

ahonnét $k \geq 185$ adódik, azaz ennyi iteráció biztosan elég lesz a kívánt pontosság eléréséhez.

7. Feladat. (6p) A gradiens módszerrel elvégeztünk egy lépést az alábbi lineáris egyenletrendszerre az $\overline{\mathbf{x}}_0 = [0,0]^T$ vektorról indulva, és az $\overline{\mathbf{x}}_1 = [2,2]^T$ vektorhoz jutottunk. Végezzünk el még egy lépést, és adjuk meg az $\overline{\mathbf{x}}_2$ vektorhoz tartozó maradékvektor 1-es normáját!

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ -x + y &= 1 \end{aligned}$$

Megoldás: $\overline{\mathbf{r}}_1 = [-1, 1]^T$, $\alpha_2 = 2/5$, $\overline{\mathbf{x}}_2 = [8/5, 12/5]^T$, $\overline{\mathbf{r}}_2 = [1/5, 1/5]^T$, melynek 1-es normája $2/5$.

Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat, Megoldások, (2015/16. I.) B. csoport

1. Feladat. (6p) A $d > 0$ paraméter felhasználásával kiszámoljuk az $x = \det(\mathbf{A})$ mennyiséget, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1/d \\ -1 & d \end{bmatrix}.$$

Adjuk meg a feladat relatív kondíciószámát! Mikor lesz jól és mikor lesz rosszul kondicionált a feladat?

Megoldás: $x = d + 1/d =: G(x)$, ahol $G(x)$ a megoldófüggvény. Így tehát

$$\kappa(d) = \left|\frac{G'(x)d}{G(d)}\right| = \left|\frac{(1-1/d^2)d}{d+1/d}\right| = \left|1 - \frac{2}{d^2+1}\right|.$$

Az abszolút értékben szereplő kifejezés mindig -1 és 1 közé esik, így $\kappa(d) \leq 1$, azaz a feladat mindig jól kondicionált, mert ez a szám kicsi.

2. Feladat. (6p) Igazoljuk az alábbi állításokat négyzetes mátrixokra! $\|.\|$ egy tetszőleges indukált mátrixnormát jelent és $\mathbf{E}$ az egységmátrix.

a) Ha $\|\mathbf{E} - \mathbf{A}\| < 1$, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix invertálható.

b) Ha egy $\mathbf{A}$ mátrixhoz létezik egy olyan $\mathbf{B}$ ”közelítő inverz” mátrix, melyre $\|\mathbf{E} - \mathbf{AB}\| < 1$, akkor $\mathbf{A}$ is és $\mathbf{B}$ is invertálható mátrixok.

Megoldás:

a) Ha $\varrho(\mathbf{X}) < 1$, akkor az $\mathbf{E} - \mathbf{X}$ mátrix invertálható (és inverze megegyezik az $\mathbf{E}+\mathbf{X}+\mathbf{X}^2+\ldots$ sor összegével). Ezt felhasználva: mivel $\|\mathbf{E}-\mathbf{A}\| < 1$, ezért $\varrho(\mathbf{E}-\mathbf{A}) < 1$, így az $\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{A}$ mátrix is invertálható. Ezt kellett megmutatni.

b) Az a) részből következik, hogy $\mathbf{AB}$ invertálható, de ez meg csak úgy lehet, ha mindkét mátrix invertálható. Ez látszik pl. a $0 \neq det(\mathbf{AB}) = det(\mathbf{A})\, det(\mathbf{B})$ egyenlőségből.

3. Feladat. (6p) Igazoljuk, hogy az alábbi mátrix M-mátrix! (Keressük a $\overline{\mathbf{g}}$ vektort $[a, b, b, a]^T$ alakban!) Adjunk felső becslést a mátrix inverzének maximumnormájára!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A mátrixnak nincs pozitív főátlón kívüli eleme, továbbá a javasolt $\overline{\mathbf{g}}$ (nyilván pozitív elemű) vektorral $(\mathbf{A}\overline{\mathbf{g}})_1 = 5a - 2b$ és $(\mathbf{A}\overline{\mathbf{g}})_2 = 4b - 4a$. (A szimmetria miatt a másik két elem is ugyanez.) Ha tehát $a < b < 5a/2$, akkor $\mathbf{A}\overline{\mathbf{g}} > 0$. Ilyen vektor pl. a $\overline{\mathbf{g}} = [1, 2, 2, 1]^T$ vektor, melyre $\mathbf{A}\overline{\mathbf{g}} = [1, 4, 4, 1]^T$. Ebből következik, hogy a mátrix M-mátrix.

A tanult becsléssel:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\|\overline{\mathbf{g}}\|_\infty}{\min(\mathbf{A}\overline{\mathbf{g}})} = \frac{2}{1} = 2$$

.

4. Feladat. (6p) Legyen $\mathbf{A}$ a 3. feladatban szereplő mátrix, $\tilde{\mathbf{A}}$ pedig az a mátrix, amit úgy kapunk, hogy $\mathbf{A}$ minden eleméhez hozzáadunk egy-egy 0.01-nél nem nagyobb abszolút értékű valós számot. Az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = [1, 1, 1, 1]^T$ egyenletrendszer pontos megoldása $\overline{\mathbf{x}}^\star = [0.5, 0.75, 0.75, 0.5]^T$. Legfeljebb mennyivel változhatnak meg a megoldásvektor elemei, ha az egyenletrendszerben az $\mathbf{A}$ mátrixot $\tilde{\mathbf{A}}$-ra cseréljük, és tudjuk, hogy $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = 0.75$ (ez utóbbi adattal lehet ellenőrizni a 3. feladat eredményét is)?

Megoldás: Legyen az új egyenlet megoldása $\tilde{\mathbf{x}}$. Mivel a jobb oldal nem változik a feladat során, a tanult hibabecslő képletünk az alábbi becslést adja:

$$\frac{\|\overline{\mathbf{x}}^\star - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\overline{\mathbf{x}}^\star\|_\infty} \le \frac{\kappa_\infty(\mathbf{A})}{1-\kappa_\infty(\mathbf{A})\|\delta\mathbf{A}\|_\infty/\|\mathbf{A}\|_\infty}\frac{\|\delta\mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty} = 0.03092,$$

mivel $\|\mathbf{A}\|_\infty = 10$, $\kappa_\infty(\mathbf{A}) = 10\cdot 0.75$ és $\|\delta\mathbf{A}\|_\infty = 0.04$. Továbbá $\|\overline{\mathbf{x}}^\star\|_\infty = 0.75$ miatt

$$\|\overline{\mathbf{x}}^\star - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty \le 0.75\cdot 0.03092 = 0.02395.$$

Tehát 0.02395-nél nem térhetnek el jobban az elemek.

5. Feladat. (6p) Határozzuk meg az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Feladat. (6p) A 7. feladatban szereplő egyenletrendszert szeretnénk megoldani a relaxált Gauss–Seidel-iterációval. Melyik ω választás vezet konvergens módszerre az $\omega = 5$ és $\omega = 0.5$ értékek közül? Az $\overline{\mathbf{x}}_0 = [0,0]^T$ vektorról indítva a konvergens iterációt, hány lépés után mondhatjuk már biztosan, hogy a kapott iterációs vektor 10^{-8}-nál jobban megközelíti a megoldást maximumnormában?

Megoldás: A 7. feladatban adott egyenletrendszer mátrixa szimmetrikus pozitív definit (csak ilyenekre lehet ugyanis a gradiens módszert közvetlenül alkalmazni). Az ilyen mátrixokra a relaxált Gauss–Seidel-módszer csak pontosan a $(0,2)$ intervallumbeli ω értékekre lesz konvergens. Így az $\omega = 1/2$ választás lesz csak jó.

Így az iteráció alakja

$$\overline{\mathbf{x}}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6/12 & 2/12 \\ 3/12 & 7/12 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \overline{\mathbf{x}}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 2/12 \\ 7/12 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{f}}},$$

ahonnét $\overline{\mathbf{x}}_0 = [0,0]^T$ miatt $\overline{\mathbf{x}}_1 = [2/12, 7/12]^T$, és $\|\mathbf{B}\|_\infty = 5/6$. Ebből a hibabecslés

$$\|\overline{\mathbf{x}}_k - \overline{\mathbf{x}}^\star\|_\infty \le \frac{(5/6)^k}{1/6}\frac{7}{12} \le 10^{-8},$$

ahonnét $k \ge 108$ adódik, azaz ennyi iteráció biztosan elég lesz a kívánt pontosság eléréséhez.

7. Feladat. (6p) A gradiens módszerrel elvégeztünk egy lépést az alábbi lineáris egyenletrendszerre az $\overline{\mathbf{x}}_0 = [0,0]^T$ vektorról indulva, és az $\overline{\mathbf{x}}_1 = [1,1]^T$ vektorhoz jutottunk. Végezzünk el még egy lépést, és adjuk meg az $\overline{\mathbf{x}}_2$ vektorhoz tartozó maradékvektor 1-es normáját!

$$\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ -x + y &= 1 \end{aligned}$$

Megoldás: $\overline{\mathbf{r}}_1 = [-1,1]^T$, $\alpha_2 = 1/3$, $\overline{\mathbf{x}}_2 = [2/3, 4/3]^T$, $\overline{\mathbf{r}}_2 = [1/3, 1/3]^T$, melynek 1-es normája 2/3.