Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat (2016/17. I., M. csoport)

1. Feladat. (6p) Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szinguláris mátrix esetén igaz az $\|\mathbf{E} - \mathbf{A}\| \geq 1$ alsó becslés, ahol $\|.\|$ tetszőleges indukált mátrixnorma és $\mathbf{E}$ az egységmátrix!

2. Feladat. (6p) Egy 10-es számrendszeren alapuló számítógép a $\sin x$ és $\cos x$ függvények értékeit pontosan számolja, majd az eredmények ábrázolásánál háromjegyű mantisszára kerekít. Határozzuk meg ezen a számítógépen az $f(x) = \sin x + \cos x - 1$ függvény értékét az $x = 0.01$ helyen! Javasoljunk jobb képletet az $f(0.01)$ érték kiszámítására, és azzal is végezzük el a számítást!

3. Feladat. (2+1+3p) Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix Cholesky-felbontását! Ezen felbontás segítségével oldjuk meg az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ lineáris egyenletrendszert! Maximum mennyivel változhatnának meg a megoldásvektor elemei, ha a $\overline{\mathbf{b}}$ vektor elemeihez egy 0.01-nél nem nagyobb abszolút értékű számot adnánk (az $\mathbf{A}$ mátrixon nem változtatunk)?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

4. Feladat. (5+1p) Az előző feladat egyenletrendszerét szeretnénk megoldani a Gauss–Seidel-iterációval. Adjuk meg, hogy legfeljebb hány iterációs lépés szükséges ahhoz, hogy az $\overline{\mathbf{x}}_0 = [0, 0]^T$ vektorról indulva maximumnormában 10^{-6}-nál jobban megközelítsük az egyenlet megoldását! Ha relaxálnánk a Gauss–Seidel-módszert, akkor milyen ω paramétereket használhatnánk a megoldáshoz?

5. Feladat. (6p) A gradiens-módszerrel a $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}/2 - \overline{\mathbf{x}}^T\overline{\mathbf{b}}$ célfüggvény abszolút minimumhelyét keressük. Mutassuk meg, hogy a módszer során φ értéke a

$$\varphi(\overline{\mathbf{x}}_{k+1}) = \varphi(\overline{\mathbf{x}}_k) - \frac{1}{2}\frac{\|\overline{\mathbf{r}}_k\|_2^4}{\overline{\mathbf{r}}_k^T\mathbf{A}\overline{\mathbf{r}}_k}$$

módon változik, ahol $\overline{\mathbf{r}}_k$ - a szokott módon - a k. lépésbeli maradékvektort jelenti!

6. Feladat. (6p) Adjunk meg olyan $\mathbf{H}$ ortogonális mátrixot, melyre

$$\mathbf{H}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha\overline{\mathbf{e}}_1,$$

ahol $\alpha \in \mathbb{R}$, $\overline{\mathbf{e}}_1$ pedig az első egységvektor! Végezzük is el a szorzást!

7. Feladat. (4+2p) Givens-forgatás segítségével végezzünk el egy lépést a sajátértékek meghatározására használt QR-iterációval, és a kapott mátrix segítségével adjunk becslést az $\mathbf{A}$ mátrix legnagyobb sajátértékére!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat (2016/17. I., F. csoport)

1. Feladat. (6p) Egy 10-es számrendszeren alapuló számítógép a $\sin x$ és $\cos x$ függvények értékeit pontosan számolja, majd az eredmények ábrázolásánál négyjegyű mantisszára kerekít. Határozzuk meg ezen a számítógépen az $f(x) = \cos x - 1 + \sin x$ függvény értékét az $x = 0.001$ helyen! Javasoljunk jobb képletet az $f(0.001)$ érték kiszámítására, és azzal is végezzük el a számítást!

2. Feladat. (1+3+1+1p) Mondjuk ki és igazoljuk a valós négyzetes mátrixok LU-felbontásáról szóló tételt! Hogy lehet az L és U mátrixokat előállítani? Miért hasznos az LU-felbontás előállítása?

3. Feladat. (2+1+3p) Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix Cholesky-felbontását! Ezen felbontás segítségével oldjuk meg az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ lineáris egyenletrendszert! Maximum mennyivel változhatnának meg a megoldásvektor elemei, ha a $\overline{\mathbf{b}}$ vektor elemeihez egy 0.01-nél nem nagyobb abszolút értékű számot adnánk (az $\mathbf{A}$ mátrixon nem változtatunk)?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

4. Feladat. (5+1p) Az előző feladat egyenletrendszerét szeretnénk megoldani a Gauss–Seidel-iterációval. Adjuk meg, hogy legfeljebb hány iterációs lépés szükséges ahhoz, hogy az $\overline{\mathbf{x}}_0 = [0,0]^T$ vektorról indulva maximumnormában 10^{-6}-nál jobban megközelítsük az egyenlet megoldását! Ha relaxálnánk a Gauss–Seidel-módszert, akkor milyen ω paramétereket használhatnánk a megoldáshoz?

5. Feladat. (1+1+3+1p) A gradiens-típusú módszereknél melyik függvény minimumhelyének megkeresése ekvivalens az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}$ egyenlet megoldásával? A módszer működéséhez mit kell feltennünk az $\mathbf{A}$ mátrixról? Az $\overline{\mathbf{x}}_k$ pontból a $\overline{\mathbf{p}}_k$ keresési irány esetén melyik $\overline{\mathbf{x}}_{k+1}$ pontba lép át a módszer (igazoljuk)? Mutassuk meg, hogy az $\overline{\mathbf{x}}_{k+1}$ pontbeli maradékvektor merőleges lesz a $\overline{\mathbf{p}}_k$ keresési irányra!

6. Feladat. (6p) Adjunk meg olyan $\mathbf{H}$ ortogonális mátrixot, melyre

$$\mathbf{H} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha \overline{\mathbf{e}}_1,$$

ahol $\alpha \in \mathbb{R}$, $\overline{\mathbf{e}}_1$ pedig az első egységvektor! Végezzük is el a szorzást!

7. Feladat. (4+2p) Givens-forgatás segítségével végezzünk el egy lépést a sajátértékek meghatározására használt QR-iterációval, és a kapott mátrix segítségével adjunk becslést az $\mathbf{A}$ mátrix legnagyobb sajátértékére!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$