Numerikus módszerek I. zárthelyi dolgozat (2008/09. I. minta)

Minden feladat 5 pontot ér, így összesen 40 pont szerezhető a feladatsorral.

1. Feladat. Az alábbi feladatokban x jelöli az ismeretlen mennyiséget

$$a)\ x - a^d = 0,\ a > 0, \quad b)\ d - x + 1 = 0.$$

Határozzuk meg a relatív kondíciószámukat a d paraméter függvényében! Korrekt kitűzésűek-e ezek a feladatok?

2. Feladat. Az $x + y + z$ összeget egy olyan számítógépen számítjuk ki, amely lebegőpontos számokat használ és a gépi pontosság $\mathbf{u}$. Tegyük fel, hogy mindhárom szám pontosan ábrázolható a lebegőpontos számrendszerben. Igazoljuk, hogy a pontos és a számított érték eltérése abszolút értékben becsülhető a $(2|x + y| + |z|)\mathbf{u}$ kifejezéssel! Milyen becslés adható, ha a számábrázolásnak is van hibája?

3. Feladat. Tekintsük az alábbi mátrixot

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Számítsuk ki a mátrix 1-es és maximumnormáját! Adjunk felső becslést a 2-es normára!

b) Diagonalizálható-e az $\mathbf{A}$ mátrix? A választ részletesen indokoljuk!

4. Feladat. Az előző feladat $\mathbf{A}$ mátrixával szeretnénk megoldani az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = [1, 1, 1]^T$ lineáris egyenletrendszert a relaxált Jacobi iterációs módszerrel úgy, hogy az iterációt a nullvektorról indítjuk. Hogyan válasszuk meg ω értékét, hogy a módszer konvergáljon? Melyik ω értékre lesz a konvergencia a leggyorsabb? Becsüljük meg a Jacobi-módszer esetén, hogy kb. hány iteráció után kapjuk meg a megoldást 10^{-6}-nál pontosabban maximum normában!

5. Feladat. Oldjuk meg a $\mathbf{H}_3\overline{\mathbf{x}} = [1, 0, 0]^T$ lineáris egyenletrendszert, ahol $\mathbf{H}_3$ a 3×3-as Hilbert-mátrix a Gauss-módszerrel feltételezve, hogy csak kétjegyű mantisszával dolgozhatunk. Hasonlítsuk össze a megoldást a pontos $\overline{\mathbf{x}} = [9, -36, 30]^\top$ értékkel! Magyarázzuk meg a jelenséget!

6. Feladat. Határozzuk meg az alábbi $\mathbf{B}$ mátrix Cholesky-felbontását!

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tegyük fel, hogy a $\mathbf{B}$ mátrix egy lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa. Milyen iterációs megoldási módszereket használhatunk a megoldására? Soroljuk fel ezeket! Adjuk meg $\kappa_\infty(\mathbf{B})$ értékét!

7. Feladat. Tekintsük a $\mathbf{B}\overline{\mathbf{x}} = [1, 1]^T$ lineáris egyenletrendszert! Megoldására alkalmazzuk a gradiens módszert. Végezzünk el két iterációs lépést $(\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2)$! Határozzuk meg az $\overline{\mathbf{x}}_2$ pontban a gradϕ vektort, ahol $\phi(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{B}\overline{\mathbf{x}}/2 - \overline{\mathbf{x}}^T[1, 1]^T$!

8. Feladat. Ha egy tridiagonális mátrixra alkalmazzuk a Gauss-módszert, akkor figyelembe vehetjük, hogy a főátló "alatt" csak a közvetlenül a főátló alatti elemek különböznek nullától. Mekkora lesz a ilyen mátrixok LU-felbontásának műveletszáma? Mit mondhatunk az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ mátrixok szerkezetéről? Ha már a mátrix LU-felbontása elkészült, akkor mennyi műveletbe kerül egy egyenletrendszer megoldása?