Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat, 2008/09. I. félév, A. csoport

Minden feladat 5 pontot ér, így összesen 40 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 16 pont szükséges.

1. Feladat. Adjunk meg egy olyan Householder tükrözési mátrixot, amellyel a $[2, 1, 2]^T$ vektort az $\overline{\mathbf{e}}_1$ vektor számszorosába lehet transzformálni!

2. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{A}$ egy nemszinguláris négyzetes mátrix és $\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1$ és $\mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2$ két különböző QR-felbontása $\mathbf{A}$-nak, akkor van olyan $\mathbf{D}$ diagonális mátrix, melyre $\mathbf{D}^2 = \mathbf{E}$ és $\mathbf{R}_2 = \mathbf{D}\mathbf{R}_1$ és $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_1\mathbf{D}$.

3. Feladat. Az $f(x) = x^{-2}$ függvényt közelítjük a $[0.5, 1]$ intervallumon az ekvidisztáns felosztáshoz tartozó alappontokbeli függvényértékekre illesztett $p(x)$ interpolációs polinommal. Mekkora

$$\max_{x\in[0.5,1]} |p(x) - f(x)|$$

interpolációs hibára számíthatunk, ha az osztóintervallumok száma 10?

4. Feladat. Jelölje $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a $\mathbf{C}$ mátrix sajátértékeit növekvő sorrendben. Hatványmódszert hajtunk végre az $\mathbf{A} = \mathbf{C} - 10\mathbf{E}$ mátrixszal. A $\mathbf{C}$ mátrix melyik sajátvektora határozható meg az előállított $\overline{\mathbf{y}}^{(k)}$ vektorsorozattal? Hajtsunk végre egy iterációs lépést a $[2/3, 1/3, 2/3]^T$ vektorral, majd adjunk becslést az eredmény alapján a $\mathbf{C}$ mátrix megfelelő sajátértékére!

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

5. Feladat. Hány megoldása van az $e^{-x} + x^2 - 10 = 0$ egyenletnek? Határozzuk meg a pozitív megoldás(oka)t a Newton-módszer segítségével legalább hat helyes tizedesjegyre!

6. Feladat. Közelítsük a $\sin x$ függvényt Hermite-Fejér interpolációs polinommal az $x = 0$, $x = \pi/2$ alappontokon. Becsüljük meg az eredmény alapján $\sin(\pi/4)$ értékét!

7. Feladat. Az $f'(x)$ érték közelítésére az

$$f'(x) \approx \frac{4f(x + 3h) + 5f(x) - 9f(x - 2h)}{30h}$$

numerikus differenciálási formulát használjuk. Feltételezve, hogy f kellően sokszor differenciálható, határozzuk meg a közelítés rendjét! Közelítsük a képlettel $f'(0)$ értékét az $f(x) = x + x^4$ függvényre $h = 0.1$ választással!

8. Feladat. Az

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

integrál közelítő értékére $I_8 = 0.74586561$ adódott az összetett trapéz-szabályt használva 8 osztóintervallumon. Határozzuk meg I_4 értékét, majd I_4 és I_8 felhasználásával mondjunk egy jobb becslést I-re! A Romberg-eljárás képlete:

$$I(f) = \frac{I_{2n}(f)2^r - I_n(f)}{2^r - 1}.$$

Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat, 2008/09. I. félév, B. csoport

Minden feladat 5 pontot ér, így összesen 40 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 16 pont szükséges.

1. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{A}$ egy nemszinguláris négyzetes mátrix és $\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1$ és $\mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2$ két különböző QR-felbontása $\mathbf{A}$-nak, akkor van olyan $\mathbf{D}$ diagonális mátrix, melyre $\mathbf{D}^2 = \mathbf{E}$ és $\mathbf{R}_2 = \mathbf{D}\mathbf{R}_1$ és $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_1\mathbf{D}$.

2. Feladat. Adjunk meg egy olyan Householder tükrözési mátrixot, amellyel az $[1,2,2]^T$ vektort az $\overline{\mathbf{e}}_1$ vektor számszorosába lehet transzformálni!

3. Feladat. Az $f(x) = 1/x$ függvényt közelítjük a $[0.5, 1]$ intervallumon az ekvidisztáns felosztáshoz tartozó alappontokbeli függvényértékekre illesztett $p(x)$ interpolációs polinommal. Mekkora

$$\max_{x\in[0.5,1]} |p(x) - f(x)|$$

interpolációs hibára számíthatunk, ha az osztóintervallumok száma 10?

4. Feladat. Jelölje $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a $\mathbf{C}$ mátrix sajátértékeit növekvő sorrendben. Hatványmódszert hajtunk végre az $\mathbf{A} = \mathbf{C} - 11\mathbf{E}$ mátrixszal. A $\mathbf{C}$ mátrix melyik sajátvektora határozható meg az előállított $\overline{\mathbf{y}}^{(k)}$ vektorsorozattal? Hajtsunk végre egy iterációs lépést a $[2/3, 1/3, 2/3]^T$ vektorral, majd adjunk becslést az eredmény alapján a $\mathbf{C}$ mátrix megfelelő sajátértékére!

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

5. Feladat. Hány megoldása van az $e^x + x^2 - 10 = 0$ egyenletnek? Határozzuk meg a negatív megoldás(oka)t a Newton-módszer segítségével legalább hat helyes tizedesjegyre!

6. Feladat. Közelítsük a $\cos x$ függvényt Hermite-Fejér interpolációs polinommal az $x = 0$, $x = \pi/2$ alappontokon. Becsüljük meg az eredmény alapján $\cos(\pi/4)$ értékét!

7. Feladat. Az

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

integrál közelítő értékére $I_6 = 0.74511941$ adódott az összetett trapéz-szabályt használva 6 osztóintervallumon. Határozzuk meg I_3 értékét, majd I_3 és I_6 felhasználásával mondjunk egy jobb becslést I-re! A Romberg-eljárás képlete:

$$I(f) = \frac{I_{2n}(f)2^r - I_n(f)}{2^r - 1}.$$

8. Feladat. Az $f'(x)$ érték közelítésére az

$$f'(x) \approx \frac{-9f(x-2h) + 5f(x) + 4f(x+3h)}{30h}$$

numerikus differenciálási formulát használjuk. Feltételezve, hogy f kellően sokszor differenciálható, határozzuk meg a közelítés rendjét! Közelítsük a képlettel $f'(0)$ értékét az $f(x) = x + x^3$ függvényre $h = 0.1$ választással!