Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat, 2008/09. I. félév, Megoldások, A. csoport

Minden feladat 5 pontot ér, így összesen 40 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 16 pont szükséges.

1. Feladat. Legyen $\overline{\mathbf{x}} = [2,1,2]^T$. Ekkor $\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{x}} \pm \|\overline{\mathbf{x}}\|_2 \overline{\mathbf{e}}_1$, majd a $\overline{\mathbf{v}}$ vektorral meghatározzuk a tükrözési mátrixot a $\mathbf{H} = \mathbf{E} - 2\overline{\mathbf{v}}\overline{\mathbf{v}}^T/(\overline{\mathbf{v}}^T\overline{\mathbf{v}})$ képlet segítségével. A $\pm$ előjelnek megfelelően a lehetséges két tükrözés

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 14/15 & -2/15 \\ -2/3 & -2/15 & 11/15 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

2. Feladat. A feltételek mellett a szereplő $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok nemszingulárisak. A $\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2$ egyenlőségből $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1} = \mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2$ következik, ahol a $\mathbf{Q}$ mátrixok ortogonalitását használtuk. Jelöljük az $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1}$ mátrixot $\mathbf{D}$-vel. Ez felső háromszögmátrix, másrészt az $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1} = \mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2$ egyenlőség miatt ortogonális, azaz inverze a transzponáltja. Mivel felső háromszögmátrixok inverze felső háromszögmátrix, így az inverze csak úgy lehet a transzponáltja (ami alsó háromszögmátrix), ha $\mathbf{D}$ diagonális. $\mathbf{D}$ ortogonalitása miatt $\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^T = \mathbf{D}$, azaz $\mathbf{D}^2 = \mathbf{E}$. Így a $\mathbf{D} = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1} = \mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2$ egyenlőségből következik az állítás.

3. Feladat. A hibabecslésre az

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}h^{n+1}}{4(n+1)}$$

képletet tanultuk. Most az osztóintervallumhossz $h = 1/20$, $n = 10$ és a függvény 11. deriváltjára $(-12!x^{-13})$ a $12!2^{13}$ becslést adhatjuk. Innét a hibára 4.35×10^{-4} adódik.

4. Feladat. A sajátértékek valósak, Gersgorin tétele miatt van egy -1, 5 és 10 közelében (1,1 ill. 2 sugarú környezetekben). A $\mathbf{C} - 10\mathbf{E}$ mátrixszal a hatványmódszer az abszolút értékben domináns sajátértéket és a hozzá tartozó sajátvektort határozza meg. $\mathbf{C} - 10\mathbf{E}$ sajátértékei $\mathbf{C}$ sajátértékeinél 10-zel kisebbek, így lesz egy -11, egy -5 és egy 0 közelében. Így a -11 körüli sajátérték lesz domináns abszolút értékű, az ehhez tartozó sajátvektor a $\mathbf{C}$ mátrix λ_1 sajátértékéhez tartozó sajátvektor.

Egy lépést végrehajtva az

$$\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{20}{3} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektorhoz jutunk. Ezzel a Rayleigh-hányados -10.9641, azaz -10.9641+10=-0.9641 egy becslést ad a λ_1 sajátértékre.

5. Feladat. Az $e^{-x} = 10 - x^2$ egyenlőség két oldalán álló függvényeket ábrázolva könnyen látható, hogy két megoldás lesz. A pozitív zérushely valahol $\sqrt{10}$ közelébe esik, könnyen látható az is, hogy innét indítható is az iteráció (a függvény és második deriváltja is pozitív a zérushelyig terjedő intervallumban). Első lépésben 3.155539727, a másodikban 3.155532331 és a harmadikban ugyanaz adódik, így 3.155532331 már megfelelő közelítést ad.

6. FELADAT. $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f(\pi/2) = 1$, $f'(\pi/2) = 0$. Ebből Newton módszerével felírva az osztott differenciákat a

$$p_3(x) = x - 2\,\frac{(-2+\pi)\,x^2}{\pi^2} + 4\,\frac{(-4+\pi)\,x^2\,(x - 1/2\,\pi)}{\pi^3}$$

polinomot nyerjük. Ebbe $\pi/4$-et helyettesítve 0.6963 adódik.

7. FELADAT. Az $f(x+3h)$ és $f(x-2h)$ értékeket x-körüli Taylor-polinommal közelítve kapjuk, hogy az adott közelítés és az első derivált eltérése $M_3 h^2$-tel becsülhető felülről. Így a közelítés másodrendű. Az adott függvényre 1.006-os közelítést kapunk.

8. FELADAT. $I_4 = 0.74298410$. A képletben $r = 2$-vel kell számolni, hiszen ez a trapéz módszer rendje. Így a jobb becslés 0.74682611.

Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat, 2008/09. I. félév, Megoldások, B. csoport

1. Feladat. A feltételek mellett a szereplő $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok nemszingulárisak. A $\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2$ egyenlőségből $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1} = \mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2$ következik, ahol a $\mathbf{Q}$ mátrixok ortogonalitását használtuk. Jelöljük az $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1}$ mátrixot $\mathbf{D}$-vel. Ez felső háromszögmátrix, másrészt az $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1} = \mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2$ egyenlőség miatt ortogonális, azaz inverze a transzponáltja. Mivel felső háromszögmátrixok inverze felső háromszögmátrix, így az inverze csak úgy lehet a transzponáltja (ami alsó háromszögmátrix), ha $\mathbf{D}$ diagonális. $\mathbf{D}$ ortogonalitása miatt $\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^T = \mathbf{D}$, azaz $\mathbf{D}^2 = \mathbf{E}$. Így a $\mathbf{D} = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1} = \mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2$ egyenlőségből következik az állítás.

2. Feladat. Legyen $\overline{\mathbf{x}} = [1,2,2]^T$. Ekkor $\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{x}} \pm \|\overline{\mathbf{x}}\|_2\overline{\mathbf{e}}_1$, majd a $\overline{\mathbf{v}}$ vektorral meghatározzuk a tükrözési mátrixot a $\mathbf{H} = \mathbf{E} - 2\overline{\mathbf{v}}\overline{\mathbf{v}}^T/(\overline{\mathbf{v}}^T\overline{\mathbf{v}})$ képlet segítségével. A $\pm$ előjelnek megfelelően a lehetséges két tükrözés

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

3. Feladat. A hibabecslésre az

$$|f(x) - p_n(x)| \le \frac{M_{n+1}h^{n+1}}{4(n+1)}$$

képletet tanultuk. Most az osztóintervallumhossz $h = 1/20$, $n = 10$ és a függvény 11. deriváltjára $(-11!x^{-12})$ a $11!2^{12}$ becslést adhatjuk. Innét a hibára 0.7258×10^{-4} adódik.

4. Feladat. A sajátértékek valósak, Gersgorin tétele miatt van egy -1, 5 és 10 közelében (1,1 ill. 2 sugarú környezetekben). A $\mathbf{C} - 11\mathbf{E}$ mátrixszal a hatványmódszer az abszolút értékben domináns sajátértéket és a hozzá tartozó sajátvektort határozza meg. $\mathbf{C} - 11\mathbf{E}$ sajátértékei $\mathbf{C}$ sajátértékeinél 11-gyel kisebbek, így lesz egy -12, egy -6 és egy -1 közelében. Így a -12 körüli sajátérték lesz domináns abszolút értékű, az ehhez tartozó sajátvektor a $\mathbf{C}$ mátrix λ_1 sajátértékéhez tartozó sajátvektor.

Egy lépést végrehajtva az

$$\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{22}{3} \\ -4/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

vektorhoz jutunk. Ezzel a Rayleigh-hányados -11.8902, azaz -11.8902+11=-0.8902 egy becslést ad a λ_1 sajátértékre.

5. Feladat. Az $e^x = 10 - x^2$ egyenlőség két oldalán álló függvényeket ábrázolva könnyen látható, hogy két megoldás lesz. A negatív zérushely valahol $-\sqrt{10}$ közelébe esik, könnyen látható az is, hogy innét indítható is az iteráció (a függvény és második deriváltja is pozitív a zérushelyig terjedő intervallumban). Első lépésben -3.155539727, a másodikban -3.155532331 és a harmadikban ugyanaz adódik, így -3.155532331 már megfelelő közelítést ad.

6. Feladat. $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f(\pi/2) = 0$, $f'(\pi/2) = -1$. Ebből Newton módszerével felírva az osztott differenciákat a

$$p_3(x) = 1 - 4\,\frac{x^2}{\pi^2} - 4\,\frac{(-4+\pi)\,x^2\,(x - 1/2\,\pi)}{\pi^3}$$

polinomot nyerjük. Ebbe $\pi/4$-et helyettesítve 0.6963 adódik.

7. Feladat. $I_3 = 0.73998648$. A képletben $r = 2$-vel kell számolni, hiszen ez a trapéz módszer rendje. Így a jobb becslés 0.74683039.

8. Feladat. Az $f(x+3h)$ és $f(x-2h)$ értékeket x-körüli Taylor-polinommal közelítve kapjuk, hogy az adott közelítés és az első derivált eltérése M_3h^2-tel becsülhető felülről. Így a közelítés másodrendű. Az adott függvényre 1.006-os közelítést kapunk.