Numerikus módszerek II. zárthelyi pótdolgozat, 2008/09. I. félév

Minden feladat 5 pontot ér, így összesen 40 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 16 pont szükséges.

1. Feladat. Adjuk meg a

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix (egy) QR-felbontását!

2. Feladat. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix domináns sajátértékének egy közelítését úgy, hogy a hatványmódszer segítségével elvégzünk 4 iterációs lépést az $[1, 1, 1]^T$ vektorról indulva, majd utána a sajátértéket a Rayleigh-hányadossal becsüljük!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Feladat. Határozzuk meg a $(0, 1)$, $(2\pi/3, 2)$ és $(4\pi/3, 0)$ pontokra illeszkedő legalacsonyabb fokszámú trigonometrikus polinomot!

4. Feladat. Az $f(x) = \ln x$ függvényt közelítjük az $[1, 2]$ intervallumon az ekvidisztáns felosztáshoz tartozó alappontokbeli függvényértékekre illesztett $p(x)$ interpolációs polinommal. Ha 20 osztóintervallumot használunk, akkor mekkora interpolációs $(\max_{x\in[1,2]} |p(x) - f(x)|)$ hibára számíthatunk?

5. Feladat. Határozzuk meg az $e^{-x} = \sin x$ egyenlet legkisebb pozitív megoldását a Newton-módszer segítségével négy helyes tizedesjegy pontossággal!

6. Feladat. Az $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ alappontokhoz tartozó függvényértékekre szakaszonként harmadfokú spline-függvényt illesztünk. Igazoljuk, hogy ha $s(x)$ jelöli a meghatározott spline-függvényt, akkor $\int_{x_0}^{x_n} (s''(x))^2 \, \mathrm{d}x \le \int_{x_0}^{x_n} (f''(x))^2 \, \mathrm{d}x$ minden legalább kétszer folytonosan deriválható $f(x)$ interpolációs függvény esetén. Induljunk ki az

$$\int_{x_0}^{x_n} (f''(x))^2 \, \mathrm{d}x - \int_{x_0}^{x_n} (s''(x))^2 \, \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_n} (f''(x) - s''(x))^2 \, \mathrm{d}x + 2\int_{x_0}^{x_n} s''(x)(f''(x) - s''(x)) \, \mathrm{d}x$$

egyenlőségből és osztóintervallumonkénti parciális integrálással mutassuk meg, hogy a jobboldal utolsó tagja nulla.

7. Feladat. Amennyiben lehetséges, adjunk $f'(x)$ közelítésére egy h-ban másodrendű közelítést az $f(x)$, $f(x+h)$ és $f(x+3h)$ értékek felhasználásával!

8. Feladat. Az $f(x) = \ln x$ függvény integrálját szeretnénk közelítőleg meghatározni az [1,2] intervallumon az összetett trapézszabály segítségével. Adjunk becslést arra, hogy hány osztóintervallumot kell legalább használnunk, hogy a kvadratúraformula hibája 0.01-nél kisebb legyen, és adjunk becslést az integrálra! $(I(f) - I_{\text{trap}}(f) = -(b-a)h^2 f^{(2)}(\eta)/12)$