Numerikus módszerek II. zárthelyi pótdolgozat, 2008/09. I. félév

Minden feladat 5 pontot ér, így összesen 40 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 16 pont szükséges.

1. Feladat. Pl. Householder tükrözéssel, amit a második oszlop utolsó két eleméből álló vektorra alkalmazunk a következő QR-felbontást nyerhetjük:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & -4/5 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -12/5 \\ 0 & 0 & 9/5 \end{bmatrix}.$$

2. Feladat.

$$\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \overline{\mathbf{x}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \overline{\mathbf{x}}^{(3)} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}, \ \overline{\mathbf{x}}^{(4)} = \begin{bmatrix} 20 \\ -28 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Az $\overline{\mathbf{x}}^{(4)}$ vektorral kiszámolva a Rayleigh-hányadost a sajátérték becslése 3.4141 (A pontos érték $2 + \sqrt{2}$).

3. Feladat. Egy elsőfokú trigonometrikus polinom lesz megfelelő. Az együtthatókra tanult képletek alapján

$$t(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin x.$$

4. Feladat. A hibabecslésre az

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1} h^{n+1}}{4(n+1)}$$

képletet tanultuk. Most az osztóintervallumhossz $h = 1/20$, $n = 20$ és a függvény 21. deriváltjára $(20!x^{-20})$ a 20! becslést adhatjuk. Innét a hibára 1.3811×10^{-11} adódik.

5. Feladat. Az $e^{-x} - \sin x$ függvény legkisebb pozitív zérushelye 0 és $\pi/2$ között van. Ezen az intervallumon a függvény második deriváltja pozitív és pl. az $x = 0$ pontban a függvényérték is. Az $x^{(0)} = 0$ pontból tehát indíthatjuk az iterációt!

$$x^{(1)} = 0.5, \ x^{(2)} = 0.585644, \ x^{(3)} = 0.588529, \ x^{(4)} = 0.588533.$$

Ez az eredmény már elfogadható.

6. Feladat. A felírt képletből látható, hogy ha a jobb oldalon álló utolsó tag nulla, akkor valóban igaz az állítás. Ez az utolsó tag kétszeri parciális integrálással az alábbi alakba írható:

$$\int_{x_0}^{x_n} s''(x)(f''(x) - s''(x)) \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} s''(x)(f''(x) - s''(x)) \, \mathrm{d}x \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left([s''(x)(f'(x) - s'(x))]_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} s'''(x)(f'(x) - s'(x)) \, \mathrm{d}x \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left([s''(x)(f'(x) - s'(x))]_{x_{k-1}}^{x_k} - \left(\underbrace{[s'''(x)(f(x) - s(x))]_{x_{k-1}}^{x_k}}_{=0} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} \underbrace{s''''(x)}_{\equiv 0}(f(x) - s(x))\,\mathrm{d}x \right) \right).$$

A második tag amiatt nulla mert az alappontokban $s(x)$ és $f(x)$ ugyanazokat az értékeket veszik fel, a harmadik tag pedig azért, mert $s(x)$ szakaszonként legfeljebb harmadfokú polinom. Tehát

$$\int_{x_0}^{x_n} s''(x)(f''(x) - s''(x))\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left([s''(x)(f'(x) - s'(x))]_{x_{k-1}}^{x_k} \right)$$

$$= s''(x_n)(f'(x_n) - s'(x_n)) - s''(x_0)(f'(x_0) - s'(x_0)) = 0,$$

mivel a két végpontban $s(x)$ második deriváltja nulla.

7. Feladat. Keressük a közelítést $af(x) + bf(x+h) + cf(x+3h)$ alakban és fejtsünk sorba az x pont körül. Innét azt kapjuk, hogy másodrendű közelítéshez az $a = -4/(3h)$, $b = 3/(2h)$, $c = -1/(6h)$ választás megfelelő.

8. Feladat. $b - a = 1$ és az $\ln x$ függvény második deriváltjára egy jó felső becslés 1, így azt kapjuk a hibabecslő formulából, hogy $h < 0.346$. Azaz három osztóintervallum elegendő az adott pontossághoz. A kapott közelítés így 0.381694.