Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat, 2009/10. I. félév, A. csoport, Megoldások

Az utolsó két feladat 5, a többi 6 pontos. Sikeres zárthelyihez legalább 16 pont szükséges.

1. Feladat. Alkalmazzuk a hatványmódszert az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixra! Legyen a kezdővektor $\overline{\mathbf{x}}^{(0)} = [1, 0]^T$ és az iterációt a 4. lépés után leállítva adjunk becslést a domináns sajátértékre és egy hozzá tartozó sajátvektorra.

Először számítsuk ki az $\mathbf{A}^4\overline{\mathbf{x}}^{(0)}$ vektort:

$$\mathbf{A}^4\overline{\mathbf{x}}^{(0)} = \begin{bmatrix} 103 \\ 102 \end{bmatrix}.$$

Ez lesz a sajátvektor egy közelítése, vagy pl. 2-es normában normálva $[0.7105, 0.7036]^T$. A sajátérték közelítését a Rayleigh-hányadossal számítjuk: 3.995.

2. Feladat. Alkalmazzuk a QR-iterációt az előző feladat mátrixának sajátértékeinek meghatározására! Végezzünk el két iterációs lépést és ez alapján adjunk becslést a sajátértékekre! (A Givens forgatási mátrix egy $\overline{\mathbf{x}} = [x_1, x_2]^T$ vektorra alkalmazva $\mathbf{G} = [c, -s; s, c]$ alakú, ahol $c = x_1/\|\overline{\mathbf{x}}\|_2$, $s = -x_2/\|\overline{\mathbf{x}}\|_2$.)

A Givens-forgatás mátrixa az $\mathbf{A}$ mátrixot már felső háromszögmátrixba transzformálja, így maga a $\mathbf{G}$ mátrix lesz a QR-felbontás $\mathbf{Q}$ mátrixának transzponáltja. Így az első transzformáció alakja $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{G}^T$ lesz, ahol $\mathbf{G}$ az első oszlopból számított Givens-forgatási mátrix

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Azaz

$$\mathbf{A}^{(1)} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 19 & -3 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}.$$

A következő lépés ugyanilyen, csak most az $\mathbf{A}^{(1)}$ mátrixszal hajtjuk végre $\mathbf{A}$ helyett. Így kapjuk, hogy (tizedestörtekkel kiírva)

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3.8941 & 1.3765 \\ 0.3765 & -0.8941 \end{bmatrix}.$$

A Gersgorin-tételt alkalmazva lehet becslést mondani a sajátértékekre: 3.8941 ± 0.3765 és -0.894 ± 0.3765.

3. Feladat. Hány valós zárushelye van a $p(x) = x^3 - x - 4$ polinomnak? Az egyik meghatározására használjuk a Newton-módszert! Végezzünk el annyi iterációs lépést, hogy két egymás utáni közelítés eltérése kisebb legyen már, mint 0.01!

Mivel páratlan fokszámú a polinom, ezért legalább egy zérushelye van. A derivált zérushelyei $\pm 1/\sqrt{3}$, és ezekben a pontokban negatív értéket vesz fel a polinom. Így egyetlen zérusely van az $(1/\sqrt{3}, \infty)$ intervallumban. Könnyen látható, hogy 1-ben negatív, 2-ben meg pozitív a polinom értéke, így a zérushely 1 és 2 között van valahol. Mivel a második derivált $6x > 0$, ha $x > 0$, így a Newton-módszer pl. az $x^{(0)} = 2$ pontól indítható. 4 tizedesjegyre számolva a 3. lépésben már megfelelő eredményt kapunk: 1.7963.

4. Feladat. Az $x^{(k+1)} = \ln(1 + x^{(k)}) - (x^{(k)} - (x^{(k)})^2/2)$ iteráció fixpontja $x^\star = 0$. Adjuk meg a fixpont egy olyan környezetét, ahonnét az iterációt indítva az a fixponthoz tart! Mekkora a konvergencia rendje?

Az iterációs függvény

$$F(x) = \ln(1+x) - x + x^2/2,$$

melynek deriváltja

$$F'(x) = \frac{x^2}{1+x},$$

ami $x = 0$ esetén nulla és folytonos, így az origó egy megfelelő környezetében biztosan kisebb abszolút értékű lesz, mint $q < 1$. Tekintsük pl. a $[-0.5, 0.5]$ intervallumot. Ebben

$$\left|\frac{x^2}{1+x}\right| \le \frac{1}{4/2} = \frac{1}{2} = q,$$

azaz ebből az intervallumból indítva az iterációt, az a fixponthoz fog konvergálni.

Mivel $F'(0) = F''(0) = 0$, de $F'''(0) \neq 0$, így a konvergencia harmadrendű lesz.

5. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \sin^2 x$ függvény grafikonjáról a $(k\pi/(n+1), f(k\pi/(n+1))$ pontokat $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$. Tegyük fel, hogy az adott pontok közül a szomszédosakhoz tartozó szakaszokon legfeljebb elsőfokú polinommal interpolálunk és így az egész $[0, \pi]$ intervallumon a $p(x)$ függvényhez jutunk. Mekkora legyen n értéke, hogy $\|f - p\|_{C[0,\pi]} < 10^{-6}$ teljesüljön?

Szakaszonként lineáris függvénnyel interpolálunk. Ha két pontra illesztünk legfeljebb elsőfokú polinomot, mondjuk az $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_k, f(x_k))$ pontokra, akkor a hibabecslő formulából

$$|f(x) - p_1(x)| = \frac{f''(\xi_k)}{2}|(x - x_{k-1})(x - x_k)| \le \frac{|x_k - x_{k-1}|^2}{4}$$

adódik minden $x \in [x_{k-1} - x_k]$ esetén. ξ_k egy megfelelő pont a szakasz belsejében, $f''(x) = 2\cos(2x)$, így ennek egy felső becslése 2. Az alappontpolinom becslésére az előadáson tanult becslést használtuk.

Ha $n+1$ osztóintervallum van, akkor $|x_k - x_{k-1}| = \pi/(n+1)$, így a hibabecslés

$$|f(x) - p(x)| \le \frac{\pi^2}{4(n+1)^2} < 10^{-6},$$

ahonnét $n > 1569.79$, azaz n legalább 1570 legyen.

6. Feladat. Határozzuk meg az (1,0), (2,3), (3,1) pontokon átmenő legalacsonyabb fokú olyan $q(x)$ polinom értékét az $x = 4$ pontban, melyre $q'(1) = q'(2) = q'(3) = 1$!

A megfelelő polinomot az Hermite-Fejér interpolációs eljárással határozzuk meg osztott differenciák segítségével. A keresett polinom

$$p(x) = (x-1) + 2(x-1)^2 - 4(x-1)^2(x-2) + \frac{7}{4}(x-1)^2(x-2)^2 + \frac{3}{4}(x-1)^2(x-2)^2(x-3),$$

melyre $p(4) = 39$.

7. Feladat. Adjuk meg a $(0, -1), (\pi/2, 3), (\pi, 0), (3\pi/2, 1)$ pontokhoz tartozó legalacsonyabb fokú trigonometrikus interpolációs polinomot!

Mivel $n + 1 = 4$ pontunk van, így $m = 2$ fokszámú kiegyensúlyozott trigonometrikus polinomot keresünk. Az együtthatók képleteit felhasználva kapjuk, hogy

$$T_2(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cos x + \sin x - \frac{5}{4}\cos(2x).$$

Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat, 2009/10. I. félév, B. csoport, Megoldások

Az utolsó két feladat 5, a többi 6 pontos. Sikeres zárthelyihez legalább 16 pont szükséges.

1. Feladat. Alkalmazzuk a hatványmódszert az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrixra! Legyen a kezdővektor $\overline{\mathbf{x}}^{(0)} = [0,1]^T$ és az iterációt a 4. lépés után leállítva adjunk becslést a domináns sajátértékre és egy hozzá tartozó sajátvektorra!

Először számítsuk ki az $\mathbf{A}^4\overline{\mathbf{x}}^{(0)}$ vektort:

$$\mathbf{A}^4\overline{\mathbf{x}}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1312 \\ 1313 \end{bmatrix}.$$

Ez lesz a sajátvektor egy közelítése, vagy pl. 2-es normában normálva $[-0.7068, 0.7074]^T$. A sajátérték közelítését a Rayleigh-hányadossal számítjuk: -8.9977.

2. Feladat. Alkalmazzuk a QR-iterációt az előző feladat mátrixának sajátértékeinek meghatározására! Végezzünk el két iterációs lépést és ez alapján adjunk becslést a sajátértékekre! (A Givens forgatási mátrix egy $\overline{\mathbf{x}} = [x_1, x_2]^T$ vektorra alkalmazva $\mathbf{G} = [c, -s; s, c]$ alakú, ahol $c = x_1/\|\overline{\mathbf{x}}\|_2$, $s = -x_2/\|\overline{\mathbf{x}}\|_2$.)

A Givens-forgatás mátrixa az $\mathbf{A}$ mátrixot már felső háromszögmátrixba transzformálja, így maga a $\mathbf{G}$ mátrix lesz a QR-felbontás $\mathbf{Q}$ mátrixának transzponáltja. Így az első transzformáció alakja $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{GAG}^T$ lesz, ahol $\mathbf{G}$ az első oszlopból számított Givens-forgatási mátrix. A következő lépés ugyanilyen, csak most az $\mathbf{A}^{(1)}$ mátrixszal hajtjuk végre $\mathbf{A}$ helyett. Így kapjuk, hogy (tizedestörtekkel kiírva)

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} -9.0459 & -5.9221 \\ 0.0779 & 1.0459 \end{bmatrix}.$$

A Gersgorin-tételt alkalmazva lehet becslést mondani a sajátértékekre: -9.0459 ± 0.0779 és 1.0459 ± 0.0779.

3. Feladat. Hány valós zárushelye van a $p(x) = x^3 - 3x - 4$ polinomnak? Az egyik meghatározására használjuk a Newton-módszert! Végezzünk el annyi iterációs lépést, hogy két egymás utáni közelítés eltérése kisebb legyen már, mint 0.05!

Mivel páratlan fokszámú a polinom, ezért legalább egy zérushelye van. A derivált zérushelyei ± 1, és ezekben a pontokban negatív értéket vesz fel a polinom. Így egyetlen zérusely van az $(1, \infty)$ intervallumban. Könnyen látható, hogy 2-ben negatív, 3-ban meg pozitív a polinom értéke, így a zérushely 2 és 3 között van valahol. Mivel a második derivált $6x > 0$, ha $x > 0$, így a Newton-módszer pl. az $x^{(0)} = 3$ pontól indítható. 4 tizedesjegyre számolva a 3. lépésben már megfelelő eredményt kapunk: 2.1961.

4. Feladat. Az $f(x) = x^2 - 2 = 0$ egyenlet megoldásának meghatározására szeretnénk használni az

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + A\left(\frac{x^{(k)} - 2}{x^{(k)}}\right) + B\left(\frac{(x^{(k)})^2 - 2}{(x^{(k)})^3}\right)$$

iterációt. Határozzuk meg úgy A és B értékét, hogy a lehető legmagasabb rendű legyen a konvergencia!

Legyen az iterációs függvény

$$F(x) = x + A\left(\frac{x-2}{x}\right) + B\left(\frac{x^2-2}{x^3}\right).$$

Ennek a $\pm\sqrt{2}$ fixpontja kell legyen, amiből látszik az $A = 0$ feltétel. A konvergenciarend annál nagyobb, minél magasabbrendű deriváltja tűnik el F-nek a fixpontban ($x^\star = \pm\sqrt{2}$). Az $F'(x^\star) = 0$ feltételből $B = -1$ adódik, a második derivált már nem tűnik el, így a módszer másodrendű lesz.

Sajnos egy gépelési hiba miatt (az első zárójel számlálójában helyesen x^2 kellene, hogy szerepeljen) az iterációval csak másodrend érhető el. A helyes

$$F(x) = x + A\left(\frac{x^2-2}{x}\right) + B\left(\frac{x^2-2}{x^3}\right)$$

függvénnyel végrehajtva a rendvizsgálatot, az $1+2A+B = 0$ és $-A-5B/2 = 0$ egyenletrendszert kell megoldani, melynek megoldása $A = 1/4$, $B = -5/8$. Az iteráció harmadrendű.

5. Feladat. Tekintsük az $f(x) = e^{-x}$ függvény grafikonjáról a $(k/(n+1), f(k/(n+1)))$ pontokat ($k = 0, 1, \ldots, n+1$). Tegyük fel, hogy az adott pontok közül a szomszédosakhoz tartozó szakaszokon legfeljebb elsőfokú polinommal interpolálunk és így az egész $[0,1]$ intervallumon a $p(x)$ függvényhez jutunk. Mekkora legyen n értéke, hogy $\|f-p\|_{C[0,1]} < 10^{-4}$ teljesüljön?

Szakaszonként lineáris függvénnyel interpolálunk. Ha két pontra illesztünk legfeljebb elsőfokú polinomot, mondjuk az $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_k, f(x_k))$ pontokra, akkor a hibabecslő formulából

$$|f(x) - p_1(x)| = \frac{f''(\xi_k)}{2}|(x-x_{k-1})(x-x_k)| \leq \frac{1}{2}\frac{|x_k - x_{k-1}|^2}{4}$$

adódik minden $x \in [x_{k-1} - x_k]$ esetén. ξ_k egy megfelelő pont a szakasz belsejében, $f''(x) = e^{-x}$, így ennek egy felső becslése 1. Az alappontpolinom becslésére az előadáson tanult becslést használtuk.

Ha $n+1$ osztóintervallum van, akkor $|x_k - x_{k-1}| = 1/(n+1)$, így a hibabecslés

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{8(n+1)^2} < 10^{-4},$$

ahonnét $n > 34.3553$, azaz n legalább 35 legyen.

6. Feladat. Határozzuk meg az (1,0), (2,4), (3,0) pontokon átmenő legalacsonyabb fokú olyan $q(x)$ polinom értékét az $x = 4$ pontban, melyre $q'(1) = q'(2) = q'(3) = 0$!

A megfelelő polinomot az Hermite-Fejér interpolációs eljárással határozzuk meg osztott differenciák segítségével. A keresett polinom

$$p(x) = 4(x-1)^2 - 8(x-1)^2(x-2) + 4(x-1)^2(x-2)^2,$$

melyre $p(4) = 36$.

7. Feladat. Adjuk meg a $(0,1), (\pi/2, 0), (\pi, 3), (3\pi/2, -1)$ pontokhoz tartozó legalacsonyabb fokú trigonometrikus interpolációs polinomot!

Mivel $n+1 = 4$ pontunk van, így $m = 2$ fokszámú kiegyensúlyozott trigonometrikus polinomot keresünk. Az együtthatók képleteit felhasználva kapjuk, hogy

$$T_2(x) = \frac{3}{4} - \cos x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{5}{4}\cos(2x).$$