Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat (2010/11. I.)

Az első két feladat 5, a többi 6 pontot ér, így összesen 40 pont szerezhető a feladatsorral.

1. Feladat. Határozzuk meg az $e_k = 10^{-2^k}$ és $f_k = 10^{-k^2}$ sorozatok konvergenciarendjét!

2. Feladat. Közelítsük $\sqrt{5}$ értékét az $f(x) = \sqrt{x}$ függvényt az $x = 0, 1, 4, 9$ alappontokon interpoláló polinom $x = 5$ pontbeli értékével!

3. Feladat. Adjuk meg az alábbi mátrix QR-felbontását Householder tükrözések segítségével, majd oldjuk meg a QR-felbontást alkalmazva az $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = [1, 1, 1]^T$ túlhatározott egyenletrendszert!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Feladat. Tekintsük az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot. Jelölje a mátrix legkisebb sajátértékét $\lambda_{\min}$. Igazoljuk, hogy $\lambda_{\min} = 4 - \varrho(\mathbf{A} - 4\mathbf{E})$. ($\varrho()$ a spektrálsugarat, $\mathbf{E}$ az egységmátrixot jelöli). Adjunk becslést a $\lambda_{\min}$ értékre úgy, hogy az $\mathbf{A} - 4\mathbf{E}$ mátrixra alkalmazzuk a hatványmódszert az $\overline{\mathbf{x}}^{(0)} = [1, 1, 1, 1]^T$ kezdővektorról indulva, három iterációs lépést végrehajtva (a normálást nem kell végrehajtani az egyes lépésekben).

5. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény értékeit az $x_k = 1 + k/n$ ($k = 0, 1, \ldots, n$), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ alappontokban. Mekkora legyen n értéke legalább, hogy tetszőleges $\bar{x} \in [1, 2]$ pont esetén, ha az az $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ ($k = 1, \ldots, n-1$) intervallumba esik, teljesüljön, hogy $|p_{2,k}(\bar{x}) - f(\bar{x})| \leq 10^{-8}$, ahol $p_{2,k}$ jelöli az $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ pontokra illesztett legfeljebb másodfokú polinomot?

6. Feladat. Jelölje $s(x)$ az $(x_0 - h, f_{-1})$, (x_0, f_0) és $(x_0 + h, f_1)$ pontokat interpoláló, szakaszonként harmadfokú spline-függvényt. Igazoljuk, hogy $s'(x_0)$ megegyezik az első derivált adott alappontokon vett másodrendű központi közelítésével!

7. Feladat. Adjunk meg olyan $x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$ alakú fixpont iterációt, amely az $x^{(0)} = 0$ pontból indítva a $2 - x^2 = 0$ egyenlet pozitív megoldásához tart. Azt is adjuk meg, hogy a javasolt módszerrel, mennyit kellene lépni ahhoz, hogy a megoldást 10^{-6}-nál pontosabban megközelítsük!