Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat (2011/12. I.)

1. Feladat. (5p) Határozzuk meg az $x^4 - x - 10 = 0$ egyenlet legkisebb pozitív megoldását három helyes tizedesjegy pontossággal!

2. Feladat. (5p) Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását valamelyik tanult módszer segítségével, és végezzünk el egy iterációs lépést a QR-iterációval!

3. Feladat. (6p) Határozzuk meg az $f(x) = 1/x$ függvény esetén az $[x_0, \ldots, x_n]f$ n-edrenű osztott differenciát!

4. Feladat. (6p) Legyenek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Jelölje $\lambda_j(\varepsilon)$ $(j = 1, 2, 3)$ az $\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{B}$ mátrix sajátértékét. Adjunk becslést a $|\lambda_j(0) - \lambda_j(\varepsilon)|$ eltérésre! ($\mathbf{A}$-nak $[0, 2, 1]^T$ és $[1, -2, 0]^T$ sajátvektora rendre 1, 0 sajátértékkel.)

5. Feladat. (6p) Az $x = 0.5 + \sin x$ egyenlet megoldására alkalmaztuk az

$$x^{(k+1)} = 0.5 + \sin x^{(k)}, \ x^{(0)} = 1$$

iterációt, és eredményül az $x^\star = 1.497300\ldots$ értéket kaptuk. Mutassuk meg, hogy 10 iteráció után már megkaphattuk ezt a megoldást 6 helyes tizedesjegyre!

6. Feladat. (6p) A $\log_2 3$ értéket szeretnénk közelíteni az $f(x) = \log_2 x$ függvény $x_0 = 2$, $x_1 = 4$ és $x_2 = 8$ alappontokra illeszkedő interpolációs polinomja segítségével. Mekkora értéket ad ez a közelítés, és mekkora a várható hiba?

7. Feladat. (6p) Az $\int_0^1 (x^3 - x + 1)\,\mathrm{d}x$ integrált közelítsük az összetett trapéz-formula segítségével! Osszuk 3 ekvidisztáns intervallumra a [0,1] intervallumot! Mekkora lesz az integrál közelítő értéke, és maximum mekkora hibára számíthatunk?