Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat, megoldások (2011/12. I.)

1. Feladat. (5p) Határozzuk meg az $x^4 - x - 10 = 0$ egyenlet legkisebb pozitív megoldását három helyes tizedesjegy pontossággal!

Megoldás: Az x^4 és $x+10$ függvényeket ábrázolva látható, hogy az [1,2] intervallumban van a keresett megoldás. Dolgozzunk a Newton-módszerrel (másodrendű, így talán nem kell sokat számolni az adott pontosság eléréséhez). Az $f(x) = x^4 - x - 10$ jelöléssel, $f''(x) = 12x^2$, így pozitív föggvényértéket adó helyről kell indítani az iterációt. Legyen ez $x_0 = 2$. Az $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ iterációval számolva a harmadik és a negyedik lépések között már nincs változás a negyedik tizedesjegyben, azaz az $x_4 = 1.855585$ érték már biztosan pontos lesz három tizedesjegyre (kisebb lesz a hiba, mint $5 \cdot 10^{-4}$).

2. Feladat. (5p) Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását valamelyik tanult módszer segítségével, és végezzünk el egy iterációs lépést a QR-iterációval!

Megoldás: Alkalmazzunk Givens-forgatást! Az első oszlop elemeiből meghatározhatók a forgatási szög szinusza és koszinusza. $c = 1/\sqrt{2}$, $c = 1/\sqrt{2}$. Így a forgatási mátrix és az azzal való szorzás:

$$\mathbf{GA} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \mathbf{R}.$$

Ez a mátrix lesz az $\mathbf{R}$ mátrix, $\mathbf{G}$ transzponáltja pedig $\mathbf{Q}$.

A sajátértékek meghatározására való QR-iteráció első lépéséhez az

$$\mathbf{RQ} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

szorzatot kell kiszámolni.

3. Feladat. (6p) Határozzuk meg az $f(x) = 1/x$ függvény esetén az $[x_0, \dots, x_n]f$ n-edrenű osztott differenciát!

Megoldás: Nyilvánvalóan $[x_0]f = 1/x_0$ és

$$[x_0, x_1]f = \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}}{x_1 - x_0} = \frac{-1}{x_0 x_1}.$$

Így az lehet a sejtésünk, hogy

$$[x_0, x_1, \dots, x_n]f = \frac{(-1)^n}{x_0 x_1 \dots x_n}.$$

Ezt teljes indukcióval igazolhatjuk. $n = 0$-ra és $n = 1$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $n-1$-re is igaz, azaz

$$[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]f = \frac{(-1)^{n-1}}{x_0 x_1 \dots x_{n-1}}.$$

Így tehát

$$[x_0, x_1, \dots, x_n]f = \frac{[x_1, \dots, x_n]f - [x_0, \dots, x_{n-1}]f}{x_n - x_0} = \frac{\frac{(-1)^{n-1}}{x_1 \dots x_n} - \frac{(-1)^{n-1}}{x_0 \dots x_{n-1}}}{x_n - x_0} = \frac{(-1)^n}{x_0 x_1 \dots x_n}.$$

Ezt akartuk megmutatni.

4. Feladat. (6p) Legyenek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Jelölje $\lambda_j(\varepsilon)$ $(j = 1, 2, 3)$ az $\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{B}$ mátrix sajátértékét. Adjunk becslést a $|\lambda_j(0) - \lambda_j(\varepsilon)|$ eltérésre! ($\mathbf{A}$-nak $[0, 2, 1]^T$ és $[1, -2, 0]^T$ sajátvektora rendre 1, 0 sajátértékkel.)

Megoldás: A feladatban kapott becslés függ a becslés módszerétől, így különböző normákban, vagy más sajátvektorokat választva más-más becslés nyerhető. Két lehetséges megoldást mutatunk.

Számítsuk ki a harmadik sajátértékét a mátrixnak és a hozzá tartozó egyik sajátvektort! A karakterisztikus egyenlet $(1 - \lambda)\lambda(1 + \lambda) = 0$. Így a harmadik sajátérték -1. Mivel minden sajátérték különböző, a mátrix diagonalizálható. A -1-hez tartozó sajátvektor pl. $[1, -1, 0]^T$. Így a diagonalizáló mátrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lesz.

1. megoldás: Alkalmazzuk a Bauer–Fike-tételt! Ehhez $\mathbf{S}$ kondíciószámára van szükségünk (mondjuk maximumnormában, mert ezt könnyű számolni). Ehhez $\mathbf{S}$ inverzét kell meghatároznunk:

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Így maximumnormában a $\kappa_\infty(\mathbf{S}) = 25$ értéket kapjuk, hiszen $\mathbf{S}$-nek és $\mathbf{S}^{-1}$-nek is 5 a maximumnormája. Mivel $\mathbf{B}$ maximumnormája 3, így a

$$|\lambda_j(0) - \lambda_j(\varepsilon)| \leq 25 \cdot 3 \cdot \varepsilon = 75\varepsilon$$

becslést kapjuk.

2. megoldás: Az

$$\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{B})\mathbf{S} = \mathbf{D} + \varepsilon\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S} = \mathbf{D} + \varepsilon \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2\varepsilon & 3\varepsilon & -\varepsilon \\ -4\varepsilon & -6\varepsilon & 2\varepsilon \\ -2\varepsilon & -3\varepsilon & 1 + \varepsilon \end{bmatrix}$$

egyenlőségből, ahol $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(-1, 0, 1)$ a sajátérékeket tartalmazó diagonális mátrix, a Gersgorin-tételeket felhasználva nyerjük, hogy

$$-1 - 2\varepsilon \leq \lambda_1(\varepsilon) \leq -1 + 6\varepsilon,$$

$$-12\varepsilon \leq \lambda_2(\varepsilon) \leq 0,$$

$$1 - 4\varepsilon \leq \lambda_3(\varepsilon) \leq 1 + 6\varepsilon.$$

Ez a Bauer–Fike-tételnél jobb becslést ad.

5. Feladat. (6p) Az $x = 0.5 + \sin x$ egyenlet megoldására alkalmaztuk az

$$x^{(k+1)} = 0.5 + \sin x^{(k)}, \ x^{(0)} = 1$$

iterációt, és eredményül az $x^\star = 1.497300\ldots$ értéket kaptuk. Mutassuk meg, hogy 10 iteráció után már megkaphattuk ezt a megoldást 6 helyes tizedesjegyre!

Megoldás: Ha a fixpont iteráció a k-adik lépésben az x_k pontból az x_{k+1} pontba lép, akkor a Banach-féle fixponttételnél tanult becslés alapján

$$|x_{k+s} - x^\star| \le \frac{q^s}{1-q}|x_{k+1} - x_k|,$$

ahol most $x^\star$ az $F(x) = 0.5 + \sin x$ iterációs függvény fixpontja és q a kontrakciós tényező. Az iterációs függvény deriváltja $\cos x$, így az $[1, 1.5]$ intervallumon (1-ről indulunk ($k = 0$ a fenti becslésben) és 1.5 körüli eredményt várunk fixpontnak) $F(x)$ kontrakciós tényezője $\cos 1 \approx 0.55$, amivel csak a

$$|x_{10} - x^\star| \le \frac{q^{10}}{1-q}|x_1 - x_0| = 0.001922$$

becslést nyerjük, ami még nem megfelelő számunkra. Láthatjuk, hogy $x_1 = 1.34147$, így most vizsgáljuk meg, hogy az $[x_1, 1.5]$ intervallumon mekkora a kontrakciós tényező: $\cos x_1 \approx 0.227$. Ezzel

$$|x_{1+9} - x^\star| \le \frac{q^9}{1-q}|x_2 - x_1| = 2.7391 \cdot 10^{-7},$$

ami mutatja, hogy x_{10} már legalább 6 tizedesjegyre pontos lesz.

6. Feladat. (6p) A $\log_2 3$ értéket szeretnénk közelíteni az $f(x) = \log_2 x$ függvény $x_0 = 2$, $x_1 = 4$ és $x_2 = 8$ alappontokra illeszkedő interpolációs polinomja segítségével. Mekkora értéket ad ez a közelítés, és mekkora a várható hiba!

Megoldás: Pl. Lagrange módszerével előállítjuk az interpolációs polinomot, amibe 3-at helyettesítünk. Erre 1.5416 adódik. Az $x = 3$ pontbeli hiba

$$|\log_2 3 - p_2(3)| \le \frac{M_3}{6} w_3(3),$$

ahol $w_3(3)$ az alappontpolinom értéke 3-nál: 5, M_3 pedig egy felső becslés $\log_2 x$ harmadik deriváltjára a $[2, 8]$ intervallumon: 0.37. Ebből a 0.3083-as becslés adódik.

7. Feladat. (6p) Az $\int_0^1 (x^3 - x + 1)\,\mathrm{d}x$ integrált közelítsük az összetett trapéz-formula segítségével! Osszuk 3 ekvidisztáns intervallumra a [0,1] intervallumot! Mekkora lesz az integrál közelítő értéke, és maximum mekkora hibára számíthatunk?

Megoldás: Az összetett trapézformulával nyert eredmény: 0.7778. A hibaformula

$$|I_f - I_3(f)| \le \frac{M_2}{12} h^2 (b-a) = \frac{6}{12}(1/3)^2(1-0) = \frac{1}{18} = 0.0556,$$

ahol M_2 az integrandusz második deriváltja abszolút értékének egy felső becslése a [0,1] intervallumon: 6. (Az integrál pontos értéke 0.75.)