Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat (2012/13. I.)

Összesen 40 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez 16 pontot kell elérni.

1. Feladat. (5p) Igazoljuk, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrixnak pontosan egy negatív valós sajátértéke van!

Megoldás. A Gersgorin-körök a következők: $K_1(2)$, $K_1(-2), K_1(3), K_4(5)$, ahol $K_\varepsilon(x)$ jelenti az x körüli ε sugarú zárt körlapot a komplex számsíkon. Mivel $K_1(-2)$ diszjunkt a többi körlaptól, Gersgorin második tétele miatt ebben a körben pontosan egy sajátérték van, ami nem lehet nem nulla képzetes részű, hiszen akkor a sajátérték konjugáltja is a körbe esne. A körön belül a $[-3, -1]$ negatív valós számok vannak. A többi kör a komplex sík pozitív valós részű oldalára esik. Így biztosan pontosan egy negatív valós sajátérték van.

2. Feladat. (6p) Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix szigorúan domináns abszolútértékű sajátértékét szeretnénk meghatározni a hatványmódszer segítségével. Végezzünk el két lépést a hatványmódszerrel, és közelítsük a sajátértéket a kapott iterációs vektor Rayleigh-hányadosával! (A lépések során a normálást nem kell elvégezni!)

Megoldás. A lépésenkénti normálás azt garantálja, hogy nem fog leállni az eljárás túl- vagy alulcsordulás miatt. Most a normálást nem kell elvégezni, hiszen ez a dolog nem fenyeget. Ezt a feladat szövege is tartalmazta.

A második iterációs lépéshez nem úgy kell eljutni, hogy $\mathbf{A}^2$-tel szorozzuk a kezdővektort, hanem úgy, hogy kétszer szorozzuk $\mathbf{A}$-val (ez kevesebb művelet ugyanis).

Ha pl. $\overline{\mathbf{x}}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$, akkor $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}^{(0)}) = [1, 9, 17]^T$. Ezzel a Rayleigh-hányados

$$\frac{\overline{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \overline{\mathbf{x}}}{\overline{\mathbf{x}}^T \overline{\mathbf{x}}} = 1145/371 \approx 3.0863.$$

3. Feladat. (6p) Igazoljuk, hogy az

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{3} + \frac{1}{x_k}$$

iterációval előállított sorozat tetszőleges $x_0 \in [1, 2]$ kezdőérték esetén $\sqrt{3/2}$-hez tart! Ha $x_0 = 2$-ről indítjuk az iterációt, akkor hányadik tagtól esnek már a sorozat elemei a határérték 10^{-3}-os környezetébe?

Megoldás. A Banach-féle fixponttétel biztosítja a konvergenciát, ha igazoljuk, hogy az

$$F(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{x}$$

függvény kontrakció az $[1, 2]$ intervallumon, és hogy az intervallumot önmagába képezi.

A kontrakcióhoz elég belátni, hogy $|F'(x)| < 1$ az [1,2] intervallumon, hiszen $F'(x)$ folytonos.

$$F'(x) = \frac{1}{3} + \frac{-1}{x^2},$$

így

$$\frac{-2}{3} \leq F'(x) \leq \frac{1}{3}.$$

Így a leképezés valóban kontrakció, és a kontrakciós tényező 2/3.

$F(x)$ $\sqrt{3}$-tól balra csökkenő, jobbra növő az [1,2] intervallumon. Ez látszik a deriváltból. Így maximuma $\max\{4/3, 7/6\} = 4/3 = 1.3333$, minimuma $2/\sqrt{3} \approx 1.1547$. Azaz az intervallumot önmagába képezi.

A Banach-féle fixponttétel miatt tehát az iteráció az [1,2] intervallumbeli egyetlen fixponthoz tart, ami $\sqrt{3/2}$.

Hibabecslés szintén a Banach-féle fixponttétellel adható. Ha $x_0 = 2$, akkor $x_1 = 7/6$, azaz

$$|x_k - \sqrt{3/2}| \leq \frac{(2/3)^k}{1-(2/3)} \left|2 - \frac{7}{6}\right| \leq 10^{-3},$$

ahonnét kapjuk, hogy a 20. tagtól már beleesik a kívánt környezetbe a sorozat.

4. Feladat. (6p) Legyen $f(x)$ folytonos függvény az $[a,b]$ intervallumon, $p_1(x)$ egy tetszőleges legfeljebb elsőfokú polinom és $E(x) = f(x) - p_1(x)$. Igazoljuk, hogy ha valamilyen $\alpha \in (a,b)$ esetén $E(a) + E(\alpha) = 0$ és $E(\alpha) + E(b) = 0$, valamint

$$|E(a)| = \max_{x\in[a,b]}\{|f(x) - p_1(x)|\},$$

akkor $p_1(x)$ az a legfeljebb elsőfokú polinom, amely legközelebb van az $f(x)$ függvényhez az $\|f - p_1\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]}\{|f(x) - p_1(x)|\}$ normában!

Megoldás. A bizonyítás hasonló a Csebisev-polinomok extremális tulajdonságáról szóló tétel bizonyításához.

Tegyük fel indirekt, hogy van egy $q(x)$ legfeljebb elsőfokú polinom, amely közelebb van $f(x)$-hez az adott normában. Így a-ban, b-ben és α-ában is közelebb kell lennie f megfelelő értékéhez, mint p_1-nek.

Tegyük fel pl. hogy az a pontban $f(a) > p_1(a)$. (Ha egyenlők lennének, akkor $f(x) \equiv p_1(x)$ lenne, és triviális az állítás. Ha a másik irányú reláció teljesül, akkor a bizonyítás hasonlóan megy.) Akkor $q(a) > p_1(a)$ kell legyen. α-ban $q(\alpha) < p_1(\alpha)$ és $q(b) > p_1(b)$. Így a $q(x) - p_1(x)$ polinomnak kétszer kellene előjelet váltania a és b között, ami lehetetlen, hiszen két legfeljebb elsőfokú polinom különbségéről van szó.

5. Feladat. (6p) Adjunk becslést $\sqrt[6]{2}$ értékére úgy, hogy az $f(x) = x^6 - 2$ polinomot az $x = 0, 1, 2$ pontokra illesztett polinommal közelítjük, és megkeressük az interpolációs polinom zérushelyét!

Megoldás. A (0,-2), (1,-1), (2,62) pontokra illesztett interpolációs polinom $p_2(x) = 31x^2 - 30x - 2$, aminek az adott intervallumba eső zérushelye

$$\frac{30 + \sqrt{30^2 + 4\cdot 31\cdot 2}}{62} \approx 1.0304.$$

A pontos érték 1.1225 lenne.

6. Feladat. (6p) Mekkora interpolációs hibára számíthatunk, ha 11 ekvidisztáns alappontban interpoláljuk a [-1,1] intervallumon az e^x függvényt? Mekkora interpolációs hibára számíthatunk, ha 11 Csebisev-alappont segítségével végezzük el az interpolációt?

Megoldás. A feladat szerint $x_0 = -1$, $x_n = 1$ és 11 alappont van, melyek egyforma távolságra helyezkednek el egymástól. Így $h = 0.2$ és $n = 10$, és a függvény 11-edik deriváltjának abszolút értékére nyilván jó felső becslés e, vagy ennél nagyobb bármilyen szám. A tanult hibabecslő formulákat használva kapjuk, hogy az interpolációs hiba egy felső becslése

$$|E_n(x)| \leq \frac{e \cdot 0.2^{11}}{11 \cdot 4} \approx 1.2652 \times 10^{-9}.$$

Csebisev alappontok esetén $w_{n+1}(x)$ abszolút értékére vonatkozó jobb becslést kihasználva kapjuk, hogy

$$|E_n(x)| \leq \frac{e}{11! \cdot 2^n} = 6.65 \times 10^{-11}.$$

7. Feladat. (5p) Melyik az az elsőfokú trigonometrikus polinom, amelyik legkisebb négyzetek értelemben a legjobban közelíti a $(0,0)$, $(\pi/3,1)$, $(2\pi/3,2)$, $(3\pi/3,3)$, $(4\pi/3,4)$, $(5\pi/3,5)$ pontokat?

Megoldás. Az interpolációs polinom legfeljebb elsőfokú részletösszege lesz a legjobban közelítő polinom. Erre $T_1(x) = 5/2 - \cos x - \sqrt{3}\sin x$ adódik.