

**Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat, 2013/14. I. félév,
H. csoport**

1. FELADAT. (4+3+1p) Indítsuk el az $x_{k+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x_k^3}$ iterációt az $x_0 = 1$ pontból! Igazoljuk, hogy az iterációval előállított sorozat az $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ függvény zérushelyéhez tart! Adjuk meg, hogy mennyit kell lépni legfeljebb az iterációval, hogy 10^{-3} -nál közelebb kerüljünk a határértékhez! Mekkora a konvergencia rendje?

2. FELADAT. (7p) Mutassuk meg, hogy az $x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$ egyenletnek pontosan egy megoldása van az $[1, 2]$ intervallumban! Határozzunk meg egy olyan pontot, amelyből a Newton-módszer indítható, és végezzünk el két iterációs lépést a módszerrel a megoldás közelítésére!

3. FELADAT. (4+3p) Adjuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását és annak segítségével oldjuk meg az $\mathbf{A}[x, y]^T = [1, 1, 1, 1]^T$ túlhatározott lineáris egyenletrendszert!

4. FELADAT. (7p) Végezzünk el két lépést az $\bar{\mathbf{x}}^{(0)} = [1, 1]^T$ vektorról indulva az inverz iterációval (az iteráció során nem kell normálni a vektorokat) az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix 5-höz legközelebbi sajátértékének meghatározására! A második lépés után adjunk becslést a Rayleigh-hányados segítségével a keresett sajátértékre és a hozzá tartozó sajátvektorra!

5. FELADAT. (7p) Az $f(x) = \ln(x+1)$ függvényt interpoláljuk az $x_0 = 0$, $x_1 = 0.6$, $x_2 = 0.9$ alappontokon. Adjunk felső becslést az $x = 0.45$ pontban az interpolációs hibára!

6. FELADAT. (3+4p) Adjuk meg a $(0, 1)$, $(2\pi/3, 2)$, $(4\pi/3, 1)$ pontokat interpoláló polinomot! Adjuk meg az előző három pontot interpoláló trigonometrikus polinomot!

7. FELADAT. (3+4p) Közelítsük az $\int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx$ integrál értékét a Simpson-formula segítségével! A tanult hibabecslés segítségével adjunk meg egy olyan intervallumot, melybe a pontos integrál értéke biztosan belesik!

**Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat, 2013/14. I. félév,
S. csoport**

1. FELADAT. (4+3+1p) Indítsuk el az $x_{k+1} = \sqrt{e^{x_k}/3}$ iterációt az $x_0 = 1$ pontból! Igazoljuk, hogy az iterációval előállított sorozat az $f(x) = 3x^2 - e^x$ függvény zérushelyéhez tart! Adjuk meg, hogy mennyit kell lépni legfeljebb az iterációval, hogy 10^{-4} -nél közelebb kerüljünk a határértékhez! Mekkora a konvergencia rendje?

2. FELADAT. (7p) Mutassuk meg, hogy az $x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$ egyenletnek pontosan egy megoldása van a $[3, 4]$ intervallumban! Határozzunk meg egy olyan pontot, amelyből a Newton-módszer indítható, és végezzünk el két iterációs lépést a módszerrel a megoldás közelítésére!

3. FELADAT. (4+3p) Adjuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását és annak segítségével oldjuk meg az $\mathbf{A}[x, y]^T = [1, 1, 1, 1]^T$ túlhatározott lineáris egyenletrendszert!

4. FELADAT. (7p) Végezzünk el két lépést az $\bar{\mathbf{x}}^{(0)} = [1, 1]^T$ vektorról indulva az inverz iterációval (az iteráció során nem kell normálni a vektorokat) az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix 5-höz legközelebbi sajátértékének meghatározására! A második lépés után adjunk becslést a Rayleigh-hányados segítségével a keresett sajátértékre és a hozzá tartozó sajátvektorra!

5. FELADAT. (7p) Az $f(x) = \sqrt{x+1}$ függvényt interpoláljuk az $x_0 = 0$, $x_1 = 0.6$, $x_2 = 0.9$ alappontokon. Adjunk felső becslést az $x = 0.45$ pontban az interpolációs hibára!

6. FELADAT. (3+4p) Adjuk meg a $(0, 1)$, $(2\pi/3, -1)$, $(4\pi/3, 1)$ pontokat interpoláló polinomot! Adjuk meg az előző három pontot interpoláló trigonometrikus polinomot!

7. FELADAT. (3+4p) Közelítsük az $\int_{-0.5}^0 x \ln(x+1) dx$ integrál értékét a Simpson-formula segítségével! A tanult hibabecslés segítségével adjunk meg egy olyan intervallumot, melybe a pontos integrál értéke biztosan belesik!