Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat, 2015/16. I. félév, A. csoport

1. Feladat. (6p) Adjuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 30/50 \\ 3 & -62/50 \\ 0 & 0 \\ 4 & -16/50 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását (Householder-tükrözéssel) és annak segítségével oldjuk meg az $\mathbf{A}[x,y]^T = [1,1,0,0]^T$ túlhatározott lineáris egyenletrendszert!

2. Feladat. (6p) Igazoljuk, hogy az $x^2-2x-3=0$ egyenlet $x^\star = 3$ megoldásának megkeresésére alkalmazható az $x_{k+1} = \sqrt{2x_k+3}$ fixpontiteráció! Adjuk meg, hogy mennyit kell lépni legfeljebb az iterációval az $x_0 = 4$ pontból indítva, hogy 10^{-3}-nál közelebb kerüljünk a határértékhez! Mekkora a konvergencia rendje?

3. Feladat. (6p) Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \ \overline{\mathbf{y}}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Az

$$\overline{\mathbf{x}}_{k+1} = (\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}\overline{\mathbf{y}}_k, \ \overline{\mathbf{y}}_{k+1} = \overline{\mathbf{x}}_{k+1}/\|\overline{\mathbf{x}}_{k+1}\|_2, \ k = 0,\ldots,9$$

iterációt elvégezve $\overline{\mathbf{y}}_{10} = [0.8597, -0.5108]^T$ adódik. Ezt az eredményt felhasználva, adjunk becslést az $\mathbf{A}$ mátrix 1-hez legközelebbi sajátértékére, és a hozzá tartozó sajátvektorra! Határozzuk meg az $\overline{\mathbf{x}}_1$ vektort!

4. Feladat. (6p) A $-x^3$, $x \in [-1,1]$ függvényt interpoláljuk 3 Csebisev-alapponton ($T_3(x) = 4x^3-3x$). Írjuk fel az interpolációs polinomot, és igazoljuk, hogy az interpolációs hiba a [-1,1] intervallumon egyik pontjában sem nagyobb 1/4-nél!

5. Feladat. (6p) Adjuk meg az (1,1), (2,0), (3,2) pontokat interpoláló szakaszonként harmadfokú természetes splinefüggvény [1,2] intervallumhoz tartozó összetevőjét! Kihasználhatjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

6. Feladat. (6p) Adjuk meg az alábbi pontokat interpoláló trigonometrikus polinomot! (f_k sok értéke nulla! Ne számoljunk feleslegesen!)

x_k	0	$2\pi/6$	$4\pi/6$	$6\pi/6$	$8\pi/6$	$10\pi/6$
f_k	0	0	1	0	0	0

7. Feladat. (6p) Egy f függvénynek ismerjük az alábbi három értékét: $f(0.9) = -0.1$, $f(1) = 0$ és $f(1.1) = 0.095$. Adjunk becslést az $f'(1)$ és $\int_{0.9}^{1.1} f(x)\,\mathrm{d}x$ értékekre a haladó differencia és a trapéz-szabály segítségével! Becsüljük meg mindkét esetben a hibát, ha tudjuk, hogy $\max_{x\in[0.9,1.1]}\{|f''(x)|\} \leq 1.3$!

Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat, 2015/16. I. félév, B. csoport

1. Feladat. (6p) Adjuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 40/50 \\ 4 & 22/50 \\ 0 & 0 \\ 3 & 54/50 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását (Householder-tükrözéssel) és annak segítségével oldjuk meg az $\mathbf{A}[x,y]^T = [1,1,0,0]^T$ túlhatározott lineáris egyenletrendszert!

2. Feladat. (6p) Igazoljuk, hogy az $x^2 - 2x - 3 = 0$ egyenlet $x^\star = -1$ megoldásának megkeresésére alkalmazható az $x_{k+1} = 3/(x_k - 2)$ fixpontiteráció! Adjuk meg, hogy mennyit kell lépni legfeljebb az iterációval az $x_0 = -2$ pontból indítva, hogy 10^{-3}-nál közelebb kerüljünk a határértékhez! Mekkora a konvergencia rendje?

3. Feladat. (6p) Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \ \overline{\mathbf{y}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az

$$\overline{\mathbf{x}}_{k+1} = (\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}\overline{\mathbf{y}}_k, \ \overline{\mathbf{y}}_{k+1} = \overline{\mathbf{x}}_{k+1}/\|\overline{\mathbf{x}}_{k+1}\|_2, \ k = 0, \ldots, 9$$

iterációt elvégezve $\overline{\mathbf{y}}_{10} = [0.7037, 0.7105]^T$ adódik. Ezt az eredményt felhasználva, adjunk becslést az $\mathbf{A}$ mátrix -1-hez legközelebbi sajátértékére, és a hozzá tartozó sajátvektorra! Határozzuk meg az $\overline{\mathbf{x}}_1$ vektort!

4. Feladat. (6p) Az x^3, $x \in [-1,1]$ függvényt interpoláljuk 3 Csebisev-alapponton ($T_3(x) = 4x^3 - 3x$). Írjuk fel az interpolációs polinomot, és igazoljuk, hogy az interpolációs hiba a [-1,1] intervallumon egyik pontjában sem nagyobb 1/4-nél!

5. Feladat. (6p) Adjuk meg az (1,1), (2,0), (3,2) pontokat interpoláló szakaszonként harmadfokú természetes splinefüggvény [2,3] intervallumhoz tartozó összetevőjét! Kihasználhatjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

6. Feladat. (6p) Adjuk meg az alábbi pontokat interpoláló trigonometrikus polinomot! (f_k sok értéke nulla! Ne számoljunk feleslegesen!)

x_k	0	$2\pi/6$	$4\pi/6$	$6\pi/6$	$8\pi/6$	$10\pi/6$
f_k	0	1	0	0	0	0

7. Feladat. (6p) Egy f függvénynek ismerjük az alábbi három értékét: $f(0.9) = 0.81$, $f(1) = 1$ és $f(1.1) = 1.21$. Adjunk becslést az $f'(1)$ és $\int_{0.9}^{1.1} f(x)\,\mathrm{d}x$ értékekre a haladó differencia és a trapéz-szabály segítségével! Becsüljük meg mindkét esetben a hibát, ha tudjuk, hogy $\max_{x\in[0.9,1.1]}\{|f''(x)|\} \le 2.5$!