Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat, 2015/16. I. félév, A. csoport, Megoldások

1. Feladat. (6p) Adjuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 30/50 \\ 3 & -62/50 \\ 0 & 0 \\ 4 & -16/50 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását (Householder-tükrözéssel) és annak segítségével oldjuk meg az $\mathbf{A}[x,y]^T = [1,1,0,0]^T$ túlhatározott lineáris egyenletrendszert!

Megoldás: Az első oszlophoz tartozó Householder-tükrözési mátrix $\overline{\mathbf{v}}$ vektora $\overline{\mathbf{v}} = [5,3,0,4]^T$ (a mátrix első oszlopának első eleméhez kell hozzáadni az oszlopvektor normáját). Ezen $\overline{\mathbf{v}}$-vel megadott $\mathbf{H}$ Householder-mátrix és az $\mathbf{A}$ mátrix szorzata

$$\mathbf{HA} = \left(\mathbf{E} - 2\frac{\overline{\mathbf{v}}\overline{\mathbf{v}}^T}{\overline{\mathbf{v}}^T\overline{\mathbf{v}}}\right)\mathbf{A} = \mathbf{A} - 2\frac{\overline{\mathbf{v}}}{\overline{\mathbf{v}}^T\overline{\mathbf{v}}}(\overline{\mathbf{v}}^T\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =: \mathbf{R},$$

ami már egy felső háromszögmátrix. Így ez a mátrix lesz $\mathbf{R}$ és a Householder-mátrix lesz a $\mathbf{Q}$ (a szimmetria miatt) a QR-felbontásban.

A túlhatározott egyenletrendszer megoldásához a

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_{LS} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 2/50 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszert kell megoldani, ahol a mátrix az $\mathbf{R}$ mátrix felső négyzetes része, a jobb oldal pedig a $\mathbf{H}[1,1,0,0]^T$ vektor felső két eleme. Így $\overline{\mathbf{x}}_{LS} = [28/250, -2/50]^T$.

2. Feladat. (6p) Igazoljuk, hogy az $x^2-2x-3=0$ egyenlet $x^\star = 3$ megoldásának megkeresésére alkalmazható az $x_{k+1} = \sqrt{2x_k+3}$ fixpontiteráció! Adjuk meg, hogy mennyit kell lépni legfeljebb az iterációval az $x_0 = 4$ pontból indítva, hogy 10^{-3}-nál közelebb kerüljünk a határértékhez! Mekkora a konvergencia rendje?

Megoldás: $x^\star = 3$ valóban fixpont. Így mutassuk meg, hogy az $F(x) = \sqrt{3x+3}$ függvény teljesíti a Banach-féle fixponttétel feltételeit a [2,4] intervallumon.

$$|F'(x)| = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} \le \frac{1}{\sqrt{7}} = q < 1$$

miatt F kontrakció az adott intervallumon q kontrakciós tényezővel.

$$2 \le \sqrt{7} \le F(x) \le \sqrt{11} \le 4$$

miatt F értékei a [2,4] intervallumba esnek. Így a tétel szerint az $x_{k+1} = F(x_k)$ iterációt bárhonnét indítva az intervallumból, azaz 4-től is, az az egyetlen fixponthoz fog tartani, ami csak az $x^\star = 3$ lehet.

A hibabecslő képlet szerint

$$|x_k - x^\star| \le \frac{(1/\sqrt{7})^k}{1-1/\sqrt{7}}|\sqrt{11}-4| \le 10^{-3},$$

ami már teljesül, ha $k \ge 8$.

Az iteráció elsőrendű, mert $F'(3) \neq 0$.

3. Feladat. (6p) Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \ \overline{\mathbf{y}}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Az

$$\overline{\mathbf{x}}_{k+1} = (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}\overline{\mathbf{y}}_k, \ \overline{\mathbf{y}}_{k+1} = \overline{\mathbf{x}}_{k+1}/\|\overline{\mathbf{x}}_{k+1}\|_2, \ k = 0, \dots, 9$$

iterációt elvégezve $\overline{\mathbf{y}}_{10} = [0.8597, -0.5108]^T$ adódik. Ezt az eredményt felhasználva, adjunk becslést az $\mathbf{A}$ mátrix 1-hez legközelebbi sajátértékére, és a hozzá tartozó sajátvektorra! Határozzuk meg az $\overline{\mathbf{x}}_1$ vektort!

Megoldás: Az iteráció az inverz iterációt hajtja végre a $\mu = 1$ választással. Így $\overline{\mathbf{y}}_{10}$ jó lesz sajátvektorbecslésnek, a sajátértéket pedig a Rayleigh-hányadossal lehet becsülni: $\overline{\mathbf{y}}_{10}^T\mathbf{A}\overline{\mathbf{y}}_{10} = 3.9912$ (kb. ennyi tehát a mátrix 1-hez legközelebbi sajátértéke, a pontos érték 4). $\overline{\mathbf{x}}_1 = [2/15, -1/5]^T$ (gyorsabb egyenletrendszerrel mint inverz mátrixszal számolni).

4. Feladat. (6p) A $-x^3$, $x \in [-1, 1]$ függvényt interpoláljuk 3 Csebisev-alapponton ($T_3(x) = 4x^3 - 3x$). Írjuk fel az interpolációs polinomot, és igazoljuk, hogy az interpolációs hiba a [-1,1] intervallumon egyik pontjában sem nagyobb 1/4-nél!

Megoldás: A Csebisev-alappontok a harmadfokú Csebisev-polinom gyökei: $\pm\sqrt{3}/2, 0$. Így az interpolációs polinom Lagrange-alakja

$$p_2(x) = -(-\sqrt{3}/2)^3 \frac{x(x-\sqrt{3}/2)}{-\sqrt{3}/2(-\sqrt{3}/2-\sqrt{3}/2)} - (\sqrt{3}/2)^3 \frac{(x+\sqrt{3}/2)x}{(\sqrt{3}/2+\sqrt{3}/2)\sqrt{3}/2} = -3x/4$$

(a középső tag nulla, mert 0-ban 0 a függvényérték, ezért nincs feltüntetve).

Az alappontpolinom $w_3(x) = (x + \sqrt{3}/2)(x - 0)(x - \sqrt{3}/2)$, ami az 1 főegyütthatóra normált harmadfokú Csebisev-polinom. Erről tanultuk, hogy abszolút értéke nem nagyobb, mint $1/2^{3-1} = 1/4$.

Így a hibabecslés:

$$|f(x) - p_2(x)| = \left|\frac{f(3)(\xi)}{3!} w_3(x)\right| \leq \left|\frac{-6}{3!} w_3(x)\right| \leq \frac{1}{4},$$

és pontosan ezt akartuk megmutatni.

5. Feladat. (6p) Adjuk meg az (1,1), (2,0), (3,2) pontokat interpoláló szakaszonként harmadfokú természetes splinefüggvény [1,2] intervallumhoz tartozó összetevőjét! Kihasználhatjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: Mivel az alappontok közti távolság egyforma (1), így a splinefüggvény alappontokbeli deriváltjait a

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer adja meg. A megadott inverz mátrixszal a megoldás könnyen meghatározható. $d_0 = -7/4$, $d_1 = 2/4$ és $d_2 = 11/4$. A második intervallumon Hermite-Fejér interpolációt alkalmazva kapjuk az $s_2(x) = 1 - (7/4)(x-1) + (3/4)(x-1)^2 + (3/4)(x-1)^2(x-2)$ splinefüggvényt.

6. Feladat. (6p) Adjuk meg az alábbi pontokat interpoláló trigonometrikus polinomot! (f_k sok értéke nulla! Ne számoljunk feleslegesen!)

x_k	0	$2\pi/6$	$4\pi/6$	$6\pi/6$	$8\pi/6$	$10\pi/6$
f_k	0	0	1	0	0	0

Megoldás: Elég csak $x_k = 4\pi/6$-ra kiszámolni a $\sin(jx_k)$ és $\cos(jx_k)$ értékeket. A keresett polinom egy harmadfokú, kiegyensúlyozott trigonometrikus polinom lesz:

$$t_3(x) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{6}\sin x - \frac{1}{6}\cos(2x) - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin(2x) + \frac{1}{6}\cos(3x).$$

7. Feladat. (6p) Egy f függvénynek ismerjük az alábbi három értékét: $f(0.9) = -0.1$, $f(1) = 0$ és $f(1.1) = 0.095$. Adjunk becslést az $f'(1)$ és $\int_{0.9}^{1.1} f(x)\,\mathrm{d}x$ értékekre a haladó differencia és a trapéz-szabály segítségével! Becsüljük meg mindkét esetben a hibát, ha tudjuk, hogy $\max_{x\in[0.9,1.1]}\{|f''(x)|\} \leq 1.3$!

Megoldás: A haladó differencia:

$$\frac{0.95 - 0}{0.1} = 0.95,$$

ennek hibabecslése $M_2 h/2 = 1.3 \cdot 0.1/2 = 0.065$.

A trapézszabály által adott közelítő integrál:

$$0.2 \cdot \left(\frac{-0.1}{2} + \frac{0.095}{2} \right) = -5.10^{-4},$$

aminek hibabecslése $M_2(b-a)h^2/12 = 1.3 \cdot 0.2 \cdot 0.2^2/12 = 8.7 \cdot 10^{-4}$.

Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat, 2015/16. I. félév, B. csoport

1. Feladat. (6p) Adjuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 40/50 \\ 4 & 22/50 \\ 0 & 0 \\ 3 & 54/50 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását (Householder-tükrözéssel) és annak segítségével oldjuk meg az $\mathbf{A}[x,y]^T = [1,1,0,0]^T$ túlhatározott lineáris egyenletrendszert!

Megoldás: Az első oszlophoz tartozó Householder-tükrözési mátrix $\overline{\mathbf{v}}$ vektora $\overline{\mathbf{v}} = [5,4,0,3]^T$ (a mátrix első oszlopának első eleméhez kell hozzáadni az oszlopvektor normáját). Ezen $\overline{\mathbf{v}}$-vel megadott $\mathbf{H}$ Householder-mátrix és az $\mathbf{A}$ mátrix szorzata

$$\mathbf{HA} = \left(\mathbf{E} - 2\frac{\overline{\mathbf{v}}\overline{\mathbf{v}}^T}{\overline{\mathbf{v}}^T\overline{\mathbf{v}}}\right)\mathbf{A} = \mathbf{A} - 2\frac{\overline{\mathbf{v}}}{\overline{\mathbf{v}}^T\overline{\mathbf{v}}}(\overline{\mathbf{v}}^T\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =: \mathbf{R},$$

ami már egy felső háromszögmátrix. Így ez a mátrix lesz $\mathbf{R}$ és a Householder-mátrix lesz a $\mathbf{Q}$ (a szimmetria miatt) a QR-felbontásban.

A túlhatározott egyenletrendszer megoldásához a

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_{LS} = \begin{bmatrix} -40/50 \\ -22/50 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszert kell megoldani, ahol a mátrix az $\mathbf{R}$ mátrix felső négyzetes része, a jobb oldal pedig a $\mathbf{H}[1,1,0,0]^T$ vektor felső két eleme. Így $\overline{\mathbf{x}}_{LS} = [18/250, 22/50]^T$.

2. Feladat. (6p) Igazoljuk, hogy az $x^2 - 2x - 3 = 0$ egyenlet $x^\star = -1$ megoldásának megkeresésére alkalmazható az $x_{k+1} = 3/(x_k - 2)$ fixpontiteráció! Adjuk meg, hogy mennyit kell lépni legfeljebb az iterációval az $x_0 = -2$ pontból indítva, hogy 10^{-3}-nál közelebb kerüljünk a határértékhez! Mekkora a konvergencia rendje?

Megoldás: $x^\star = -1$ valóban fixpont. Így mutassuk meg, hogy az $F(x) = 3/(x-2)$ függvény teljesíti a Banach-féle fixponttétel feltételeit a [-2,0] intervallumon.

$$|F'(x)| = \frac{3}{(x-2)^2} \le \frac{3}{4} = q < 1$$

miatt F kontrakció az adott intervallumon q kontrakciós tényezővel.

$$-2 \le -3/2 \le F(x) \le -3/4 \le 0$$

miatt F értékei a [-2,0] intervallumba esnek. Így a tétel szerint az $x_{k+1} = F(x_k)$ iterációt bárhonnét indítva az intervallumból, azaz -2-től is, az az egyetlen fixponthoz fog tartani, ami csak az $x^\star = -1$ lehet.

A hibabecslő képlet szerint

$$|x_k - x^\star| \le \frac{(3/4)^k}{1-3/4}|-3/4-(-2)| \le 10^{-3},$$

ami már teljesül, ha $k \ge 30$.

Az iteráció elsőrendű, mert $F'(-1) \ne 0$.

3. FELADAT. (6p) Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \ \overline{\mathbf{y}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az

$$\overline{\mathbf{x}}_{k+1} = (\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}\overline{\mathbf{y}}_k, \ \overline{\mathbf{y}}_{k+1} = \overline{\mathbf{x}}_{k+1}/\|\overline{\mathbf{x}}_{k+1}\|_2, \ k = 0, \ldots, 9$$

iterációt elvégezve $\overline{\mathbf{y}}_{10} = [0.7037, 0.7105]^T$ adódik. Ezt az eredményt felhasználva, adjunk becslést az $\mathbf{A}$ mátrix -1-hez legközelebbi sajátértékére, és a hozzá tartozó sajátvektorra! Határozzuk meg az $\overline{\mathbf{x}}_1$ vektort!

Megoldás: Az iteráció az inverz iterációt hajtja végre a $\mu = -1$ választással. Így $\overline{\mathbf{y}}_{10}$ jó lesz sajátvektorbecslésnek, a sajátértéket pedig a Rayleigh-hányadossal lehet becsülni: $\overline{\mathbf{y}}_{10}^T\mathbf{A}\overline{\mathbf{y}}_{10} = -4.0094$ (kb. ennyi tehát a mátrix -1-hez legközelebbi sajátértéke, a pontos érték -4). $\overline{\mathbf{x}}_1 = [-1/3, -2/15]^T$ (gyorsabb egyenletrendszerrel mint inverz mátrixszal számolni).

4. FELADAT. (6p) Az x^3, $x \in [-1, 1]$ függvényt interpoláljuk 3 Csebisev-alapponton ($T_3(x) = 4x^3 - 3x$). Írjuk fel az interpolációs polinomot, és igazoljuk, hogy az interpolációs hiba a [-1,1] intervallumon egyik pontjában sem nagyobb 1/4-nél!

Megoldás: A Csebisev-alappontok a harmadfokú Csebisev-polinom gyökei: $\pm\sqrt{3}/2, 0$. Így az interpolációs polinom Lagrange-alakja

$$p_2(x) = (-\sqrt{3}/2)^3 \frac{x(x - \sqrt{3}/2)}{-\sqrt{3}/2(-\sqrt{3}/2 - \sqrt{3}/2)} + (\sqrt{3}/2)^3 \frac{(x + \sqrt{3}/2)x}{(\sqrt{3}/2 + \sqrt{3}/2)\sqrt{3}/2} = 3x/4$$

(a középső tag nulla, mert 0-ban 0 a függvényérték, ezért nincs feltüntetve).

Az alappontpolinom $w_3(x) = (x + \sqrt{3}/2)(x - 0)(x - \sqrt{3}/2)$, ami az 1 főegyütthatóra normált harmadfokú Csebisev-polinom. Erről tanultuk, hogy abszolút értéke nem nagyobb, mint $1/2^{3-1} = 1/4$.

Így a hibabecslés:

$$|f(x) - p_2(x)| = \left|\frac{f(3)(\xi)}{3!} w_3(x)\right| \leq \left|\frac{-6}{3!} w_3(x)\right| \leq \frac{1}{4},$$

és pontosan ezt akartuk megmutatni.

5. FELADAT. (6p) Adjuk meg az (1,1), (2,0), (3,2) pontokat interpoláló szakaszonként harmadfokú természetes splinefüggvény [2,3] intervallumhoz tartozó összetevőjét! Kihasználhatjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: Mivel az alappontok közti távolság egyforma (1), így a splinefüggvény alappontokbeli deriváltjait a

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer adja meg. A megadott inverz mátrixszal a megoldás könnyen meghatározható. $d_0 = -7/4$, $d_1 = 2/4$ és $d_2 = 11/4$. A második intervallumon Hermite-Fejér interpolációt alkalmazva kapjuk az $s_2(x) = (1/2)(x-2)+(6/4)(x-2)^2-(3/4)(x-2)^2(x-3)$ splinefüggvényt.

6. Feladat. (6p) Adjuk meg az alábbi pontokat interpoláló trigonometrikus polinomot! (f_k sok értéke nulla! Ne számoljunk feleslegesen!)

x_k	0	$2\pi/6$	$4\pi/6$	$6\pi/6$	$8\pi/6$	$10\pi/6$
f_k	0	1	0	0	0	0

Megoldás: Elég csak $x_k = 2\pi/6$-ra kiszámolni a $\sin(jx_k)$ és $\cos(jx_k)$ értékeket. A keresett polinom egy harmadfokú, kiegyensúlyozott trigonometrikus polinom lesz:

$$t_3(x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{6}\sin x - \frac{1}{6}\cos(2x) + \frac{\sqrt{3}}{6}\sin(2x) - \frac{1}{6}\cos(3x).$$

7. Feladat. (6p) Egy f függvénynek ismerjük az alábbi három értékét: $f(0.9) = 0.81$, $f(1) = 1$ és $f(1.1) = 1.21$. Adjunk becslést az $f'(1)$ és $\int_{0.9}^{1.1} f(x)\,\mathrm{d}x$ értékekre a haladó differencia és a trapéz-szabály segítségével! Becsüljük meg mindkét esetben a hibát, ha tudjuk, hogy $\max_{x\in[0.9,1.1]}\{|f''(x)|\} \leq 2.5$!