**Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat (2016/17. I., M. csoport)**

1. Feladat. (2+1+1+2p) Az $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$ polinom egy zérushelye $x^\star = 2$. Mutassuk meg, hogy ezen zérushely megkeresésére alkalmazható a Newton-módszer az $x_0 = 2.5$ pontból indítva! Végezzünk el egy lépést a módszerrel! Legyen $\varepsilon = |x_1 - x^\star|$! Adjunk becslést arra, hogy az intervallumfelezési módszert az [1,4] intervallumról indítva, legfeljebb hány lépés kellene az $x^\star$ zérushely $\varepsilon$ pontosságú meghatározásához!

2. Feladat. (5+1p) Az $f(x) = e^{x-1}$ függvényt szeretnénk interpolálni a $[-1, 1]$ intervallumon 13 alappont felvételével egy legfeljebb 12-edfokú $p_{12}(x)$ polinommal. Mutassuk meg, hogy – bárhogy is vesszük fel az alappontokat – az $|f(x) - p_{12}(x)|$ interpolációs hiba a [-1,1] intervallumon kisebb lesz $10^{-5}$-nél! Mekkora maximális hibára számíthatnánk, ha speciálisan Csebisev-alappontokat használnánk az interpolációhoz?

3. Feladat. (4+2p) Mutassuk meg, hogy a $(-1, 0)$, $(0, 1)$ és $(1, 4/3)$ pontokra illesztett szakaszonként harmadfokú természetes spline-függvény $x = 0$ pontbeli első deriváltja megegyezik az elsőrendű derivált $x = 0$ pontbeli központi differenciás közelítésével!

4. Feladat. (4+2p) Adjuk meg azt az Hermite–Fejér-féle $p(x)$ interpolációs polinomot, melyre $p(0) = 0$, $p'(0) = 1$, $p(2) = b$, $p'(2) = -1$, ahol $b$ valós paraméter! Adjuk meg a $p(x)$ polinomot, ha tudjuk hogy $b$ úgy lett választva, hogy $p(1) = 3/2$ teljesüljön!

5. Feladat. (1+5p) Milyen alakban kell keresni az alábbi táblázatban szereplő pontokra illeszthető trigonometrikus interpolációs polinomot? Adjuk meg $\cos(mx)$ együtthatóját, ahol $m$ a trigonometrikus interpolációs polinom fokszáma!

| $x_k$ | 0 | $2\pi/8$ | $4\pi/8$ | $6\pi/8$ | $8\pi/8$ | $10\pi/8$ | $12\pi/8$ | $14\pi/8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_k$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |

6. Feladat. (3+3p) Az $\int_0^1 x^2 \, dx$ integrált szeretnénk közelíteni az összetett trapézformula segítségével ekvidisztáns alappontokon! Számítsuk ki, hogy milyen közelítést ad a formula két osztóintervallum esetén! Hány osztóintervallum kellene legfeljebb ahhoz, hogy a pontos integrált $10^{-3}$-nál jobban meg tudjuk közelíteni?

7. Feladat. (2+4p) Az $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-feladat megoldására használt alábbi Runge–Kutta-típusú módszert Ralston-módszernek hívják:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + 2h/3, y_k + 2hk_1/3) \\ y_{k+1} &= y_k + h\left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2\right) \end{aligned}$$

($x_{k+1} = x_k + h$). Adjuk meg a módszer Butcher-tábláját! Végezzünk el egy lépést a módszerrel az $y' = xy$, $y(0) = 1$ feladatra a $h = 0.1$ lépésközt használva!

**Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat (2016/17. I., F. csoport)**

1. Feladat. (1+1+1+3p) Adjuk meg nemlineáris (skalár) egyenletekre a Newton-módszer képletét! Milyen pontból indítható a módszer és milyen elégséges feltétele van a monoton konvergenciának? Mondjuk ki és igazoljuk a Newton-módszer rendjéről szóló tételt!

2. Feladat. (5+1p) Az $f(x) = e^{x-1}$ függvényt szeretnénk interpolálni a $[-1, 1]$ intervallumon 11 alappont felvételével egy legfeljebb 10-edfokú $p_{10}(x)$ polinommal. Mutassuk meg, hogy – bárhogy is vesszük fel az alappontokat – az $|f(x)-p_{10}(x)|$ interpolációs hiba a [-1,1] intervallumon kisebb lesz $10^{-4}$-nél! Mekkora maximális hibára számíthatnánk, ha speciálisan Csebisev-alappontokat használnánk az interpolációhoz?

3. Feladat. (4+2p) Mutassuk meg, hogy a $(-1, 1/3)$, $(0, 0)$ és $(1, -1)$ pontokra illesztett szakaszonként harmadfokú természetes spline-függvény $x = 0$ pontbeli első deriváltja megegyezik az elsőrendű derivált $x = 0$ pontbeli központi differenciás közelítésével!

4. Feladat. (1+5p) Milyen alakban kell keresni az alábbi táblázatban szereplő pontokra illeszthető trigonometrikus interpolációs polinomot? Adjuk meg $\sin((m-1)x)$ együtthatóját, ahol $m$ a trigonometrikus interpolációs polinom fokszáma!

| $x_k$ | $0$ | $2\pi/8$ | $4\pi/8$ | $6\pi/8$ | $8\pi/8$ | $10\pi/8$ | $12\pi/8$ | $14\pi/8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_k$ | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

5. Feladat. (3+3p) Az $\int_0^1 x^2 \, dx$ integrált szeretnénk közelíteni az összetett érintő-formula segítségével ekvidisztáns alappontokon! Számítsuk ki, hogy milyen közelítést ad a formula két osztóintervallum esetén! Hány osztóintervallum kellene legfeljebb ahhoz, hogy a pontos integrált $10^{-3}$-nál jobban meg tudjuk közelíteni?

6. Feladat. (1+1+1+3p) Hogy néz ki általánosan egy interpolációs kvadratúraformula? Mit hívunk egy kvadratúraformula pontossági ill. konvergenciarendjének? Mutassuk meg, hogy ha egy $n+1$ pontra illeszkedő kvadratúraformula pontos minden legfeljebb $n$-edfokú polinomra, akkor az szükségképpen interpolációs kvadratúraformula!

7. Feladat. (2+4p) Tekintsük az $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-feladat megoldására használt alábbi Runge–Kutta-típusú módszert:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + 2h, y_k + 2hk_1) \\ y_{k+1} &= y_k + h\left(\frac{3}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2\right) \end{aligned}$$

$(x_{k+1} = x_k + h)$. Adjuk meg a módszer Butcher-tábláját! Végezzünk el egy lépést a módszerrel az $y' = xy$, $y(0) = 2$ feladatra a $h = 0.1$ lépésközt használva!