Numerikus módszerek II. zárthelyi dolgozat, 2008/09. I. félév, Minta

Minden feladat 5 pontot ér, így összesen 40 pont szerezhető a feladatsorral. Sikeres zárthelyihez legalább 16 pont szükséges.

1. Feladat. Adjuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Householder tükrözésekkel!

2. Feladat. Igazoljuk, hogy minden nemszinguláris négyzetes mátrix QR-felbontása egyértelmű abban az esetben, ha az R mátrixról megköveteljük, hogy a főátlója pozitív elemeket tartalmazzon!

3. Feladat. Tekintsük az $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ alappontokhoz tartozó Lagrange-féle $l_k(x)$ interpolációs alappolinomokat! Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(0) x_k^j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 0, & j = 1, 2, \ldots, n \; ! \end{cases}$$

4. Feladat. Adjunk becslést a $\mathbf{C}$ mátrix domináns sajátértékére! A hatványmódszert alkalmazva a 10. lépés után az $\overline{\mathbf{y}}^{(10)} = [0.0868, 0.1857, 0.9788]^T$ vektorhoz jutottunk. Adjunk egy jó becslést ez alapján a domináns sajátértékre és végezzünk el mégegy iterációs lépést a hatványmódszerrel!

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

5. Feladat. A $2\sin x - x + 3 = 0$ egyenlet megoldására alkalmazható-e az $x^{(k+1)} = 3 + 2\sin(x^{(k)})$ iteráció? Ha igen, igazoljuk a konvergenciát, ha nem, javasoljunk más megoldási módszert és végezzünk el vele egy iterációs lépést!

6. Feladat. Írjuk fel a $(0, 1)$, $(\pi, 2)$ pontokhoz tartozó legfeljebb elsőfokú (kiegyensúlyozott) trigonometrikus interpolációs polinomot!

7. Feladat. Az $\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x$ integrál közelítésére az összetett trapézmódszert használva az $I_n(f)$ értéket nyerjük. Mennyivel térhet el ettől az értéktől a közelítés, ha minden függvényérték kiszámításánál két helyes tizedesjegyre kerekítünk?

8. Feladat. Az f függvény első deriváltját szeretnénk közelíteni az x pontban az $f(x - 2h)$, $f(x)$ és $f(x + h)$ függvényértékekkel. Adjunk meg egy elsőrendű közelítést!