Numerikus módszerek 2., 2016/17. II. félév, tételsor

Véges differencia módszer

1. Lax-tétel időfüggő feladatokra felírt egylépéses sémákra.

   Speciális normák. Az egylépéses sémák általános alakja. A konzisztencia, stabilitás és konvergencia fogalma egy adott normában. Lax ekvivalencia-tétele, Lax-tétel (biz.).

2. Stabilitásvizsgálati módszerek kezdetiérték-feladatokra.

   Diszkrét Fourier-transzformáció és tulajdonságai. A balra és jobbra tolás operátorok diszkrét Fourier-transzformáltja. A növekedési faktor. A von Neumann-feltétel. A von Neumann-feltétel és a stabilitás kapcsolata (az elégségesség igazolása).

3. Stabilitásvizsgálati módszerek kezdeti- és peremértékfeladatokra.

   Egy elégséges feltétel a stabilitásra a növekedési faktor segítségével. Stabilitásvizsgálat a spektrálsugárral: szükséges feltétel a stabilitásra, szimmetrikus (biz.) és szimmetrikushoz hasonló mátrixok esete. Implicit sémák stabilitási feltétele.

4. A θ-módszer az egydimenziós hővezetési egyenletre felírt kezdeti- és peremértékfeladatra.

   Az explicit Euler-módszer, implicit Euler-módszer és Crank–Nicolson-módszerek. Konvergencia maximumnormában, és feltétele a különböző módszerek esetén (biz. EE, IE - M-mátrixos technika, Lax-tétel alkalmazásával). A műveletszámok összehasonlítása a különböző módszerek esetén.

5. Az advekciós egyenlet numerikus megoldása.

   Az advekciós egyenlet bemutatása. A CFL-feltétel. A kezdetiérték-feladatokra felírt

   $$u_j^{k+1} = \begin{cases} u_j^k - r(u_{j+1}^k - u_j^k) = (1+r)u_j^k - ru_{j+1}^k, & c < 0, \\ u_j^k - r(u_j^k - u_{j-1}^k) = (1-r)u_j^k + ru_{j-1}^k, & c \geq 0 \end{cases}$$

   ($g(\xi) = 1 - |r|(1 - e^{-\mathtt{i}\xi})$) upwind-séma és az

   $$u_j^{k+1} = \frac{1}{2}r(1+r)u_{j-1}^k + (1-r^2)u_j^k - \frac{1}{2}r(1-r)u_{j+1}^k$$

   ($g(\xi) = 1 - \mathtt{i}r\sin(\xi) - 2r^2\sin^2(\xi/2)$) Lax–Wendroff-séma származtatása és stabilitásuk. Az upwind séma stabilitása periodikus és Dirichlet-peremfeltétel esetén. Példa legalább egy, az advekciós egyenletre alkalmazható implicit sémára. A Shermann–Morrison-formula szerepe ($\mathbf{A} = \mathbf{B} - \overline{\mathbf{w}}\overline{\mathbf{z}}^T$ mátrix inverze számolható $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} + \alpha\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{w}}\overline{\mathbf{z}}^T\mathbf{B}^{-1}$ módon, ahol $\alpha = 1/(1 - \overline{\mathbf{z}}^T\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{w}})$ és $\overline{\mathbf{z}}^T\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{w}} \neq 1$).

6. A leap-frog-séma az advekciós egyenletre. Az advekciós egyenlet numerikus megoldásának tulajdonságai.

   A leap-frog-séma származtatása és inicializálási lehetőségei. Disszipáció és diszperzió fogalma. Ezek összehasonlítása az upwind és a Lax–Wendroff-sémákra. Felhasználható:

$$\sqrt{1-x} = 1 - x/2 - x^2/8 - x^3/16 - \dots,$$

$$\operatorname{arctg}(c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3 + c_4 p^4 + \dots)$$
$$= c_1 p + c_2 p^2 + (c_3 - c_1^3/3)p^3 + (c_4 - c_1^2 c_2)p^4 + \dots.$$

7. A másodrendű hullámegyenlet megoldása a véges differenciák módszerével.

   A CTCS-séma a másodrendű hullámegyenletre. A séma inicializálása. A stabilitásfogalom gyengítése (k-adrendű stabilitás) időben másodrendű egyenletekre és a Lax-tétel módosításának igazolása (biz.).

8. A Poisson-egyenlet megoldása Dirichlet-perem esetén.

   A numerikus séma konstrukciója. A megoldandó egyenletrendszer szerkezete. A konvergencia, konzisztencia és stabilitás fogalma. A konvergencia igazolása (biz.).

9. A Poisson-egyenlet megoldása Robin-perem esetén ill. nemtégla tartományon.

   A Robin-peremfeltétel kezelése az oldaléleken ill. a csúcsokban téglalaptartomány esetén. Shorly–Weller-approximáció.

10. Elliptikus feladatok esetén keletkező lineáris egyenletrendszerek megoldása.

    Az elliptikus feladatok esetén keletkező egyenletrendszer szerkezete, az egyenletrendszer megoldásának nehézségei. A kétrácsos módszer konstrukciója. A többrácsos módszer.

11. Kétdimenziós időfüggő lineáris feladatok véges differenciás megoldása.

    A kétdimenziós hővezetési egyenlet numerikus megoldása. A Crank–Nicolson-módszer. Az ADI-módszer alkalmazása a hővezetési egyenletre (Peaceman–Rachford-séma). Kétváltozós hullámegyenlet megoldása.

<u>Végeselem módszer</u>

12. A végeselem módszer elméleti előkészítése.

    A variációs és minimalizációs feladatok kapcsolata. Lax-Milgram-tétel (biz. nem kell.) A Galjorkin-módszer. Galjorkin-ortogonalitás (biz.), Céa-lemma (biz.).

13. A végeselem módszer konstrukciójának bemutatása.

Szoboljev-terek bevezetése. A végeselem módszer bemutatása a homogén Dirichlet-peremfeltételű $-\Delta u + u = f$ egyenletre. A gyenge alak felírása. A Lax-Milgram-tétel feltételeinek ellenőrzése. A Galjorkin-módszer egyenletrendszere szakaszonként lineáris elemek és szabályos háromszögrács esetén. Felhasználható: Az elemi gradiensszorzat-integrálok mátrixa ($\int_R \nabla\Psi_j \nabla\Psi_i$):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Az elemi szorzat-integrálok mátrixa ($\int_R \Psi_j \Psi_i$):

$$\frac{h^2}{24}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

14. Inhomogén Dirichlet- és Neumann-peremfeltétel kezelése a végeselem módszer során.

    Inhomogén Dirichlet- és Neumann-peremfeltétel kezelése. Az egyenletek gyenge alakjának felírása ezekben az esetekben. A V_h tér megválasztása. Természetes és lényeges peremfeltételek.

15. Végeselem terek és hibabecslések.

    Végeselem tér definíciója, regularitási követelmények, néhány speciális végeselem tér. Hibabecslés $H^1(\Omega)$ és $L_2(\Omega)$ normákban, Nitsche-trükk. Felhasználható, hogy

$$\|v - \Pi v\|_{L_2(\Omega)} \le Ch^{r+1}|v|_{H^{r+1}(\Omega)},$$
$$|v - \Pi v|_{H^1(\Omega)} \le Ch^{r}|v|_{H^{r+1}(\Omega)}.$$

16. Időfüggő másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása.

    A hővezetési és a hullámegyenlet végeselemes megoldása. A hővezetési egyenlet numerikus megoldásának nemnegativitása.