Matematika A1 építőkari hallgatóknak

Deriválás technikája, láncszabály, MEGOLDÁSOKKAL (2006. 10. 18.)

(gyak. vez.: Rudas Anna)

1. Mindegyik feladathoz tudni kell: az elemi, trigonometrikus és hiperbolikus függvények deriváltjait, és az összetett függvények deriválására vonatkozó alapvető szabályt, miszerint $f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Ez utóbbira lássunk példát:
$(\sin(2x^2))' = \cos(2x^2) \cdot 4x$.
Külön nem térek ki az összeg deriváltjára, hiszen az egyszerűen a deriváltak összege.

2. Hatványfüggvények. $(x^n)' = nx^{n-1}$, ez alapján:
   (a) $f(x) = 4x^3 - x^2 + 7, \quad f'(x) = 12x^2 - 2x$
   (b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 7x + 6, \quad f'(x) = 4x^3 - 4x + 7$
   (c) $f(x) = 4x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 7, \quad f'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{2}{3}}$
   (d) $f(x) = 4x^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{2x} = 4x^{\frac{3}{2}} - 3(2x)^{\frac{1}{2}}, \quad f'(x) = 6x^{\frac{1}{2}} - 3\frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}}2 = 6x^{\frac{1}{2}} - 3(2x)^{-\frac{1}{2}}$
   (e) $f(x) = \frac{3}{x} - 3x^{\frac{5}{3}} + 7\sqrt[3]{x}, \quad f'(x) = -3x^{-2} - 5x^{\frac{2}{3}} + \frac{7}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

3. Szorzat alakúak. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, ez alapján:
   (a) $f(x) = (2x+5)(3x^7 - 8x^2), \quad f'(x) = 2(3x^7 - 8x^2) + (2x+5)(21x^6 - 16x)$
   (b) $f(x) = (5x-7)\sqrt{2x^5}, \quad f'(x) = 5\sqrt{2x^5} + (5x-7)\frac{1}{2}(2x^5)^{-\frac{1}{2}}10x^4$
   (c) $f(x) = \sin x \cos x, \quad f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
   (d) $f(x) = (3x^7 - 8x^2)\sin x, \quad f'(x) = (21x^6 - 16x)\sin x + (3x^7 - 8x^2)\cos x$
   (e) $f(x) = (3x^3 - 8x^2)(\sin x - \cos x), \quad f'(x) = (9x^2 - 16x)(\sin x - \cos x) + (3x^3 - 8x^2)(\cos x + \sin x)$

4. Hányados alakúak. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, ez alapján:
   (a) $f(x) = \frac{x^3-1}{1+2x}, \quad f'(x) = \frac{3x^2(1+2x) - (x^3-1)2}{(1+2x)^2}$
   (b) $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2+2x}, \quad f'(x) = \frac{3x^2(x^2+2x) - (x^3+4)(2x+2)}{(x^2+2x)^2}$
   (c) $f(x) = \frac{x^3+x^2+4}{\cos x}, \quad f'(x) = \frac{(3x^2+2x)\cos x + (x^3+x^2+4)\sin x}{\cos^2 x}$
   (d) $f(x) = \frac{x^2 \tan x}{2+\cos x}, \quad f'(x) = \frac{(2x\tan x + x^2\frac{1}{\cos^2 x})(2+\cos x) + x^2\tan x \sin x}{(2+\cos x)^2}$
   (e) $f(x) = \frac{4}{(1-x^2)(1-3x^2)}, \quad f'(x) = 4\frac{-\left(-2x(1-3x^2) - (1-x^2)6x\right)}{(1-x^2)^2(1-3x^2)^2}$
   (f) $f(x) = \frac{x^3+3}{(x^2+x+1)\sin x}, \quad f'(x) = \frac{3x^2(x^2+x+1)\sin x - (x^3+3)((2x+1)\sin x + (x^2+x+1)\cos x)}{(x^2+x+1)^2\sin^2 x}$
   (g) $f(x) = \frac{2x^2-4x}{(1-x^2)\sqrt{x}}, \quad f'(x) = \frac{(4x-4)(1-x^2)\sqrt{x} - (2x^2-4x)(-2x\sqrt{x} + (1-x^2)\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})}{(1-x^2)^2 x}$
   (h) $f(x) = \frac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}, \quad f'(x) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1+\arcsin x) - (1-\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(1+\arcsin x)^2} = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}(1+\arcsin x)^2}$

5. Exponenciális függvények.
   (a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad f'(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \ln\frac{1}{3}$
   (b) $f(x) = 2^x \ln x, \quad f'(x) = 2^x \ln 2 \ln x + 2^x\frac{1}{x}$
   (c) $f(x) = \frac{3^x}{x^2+3x}, \quad f'(x) = \frac{3^x \ln 3(x^2+3x) - 3^x(2x+3)}{(x^2+3x)^2}$

6. Összetett függvények.
   (a) $f(x) = \sin(\cos x), \quad f'(x) = \cos(\cos x)(-\sin x)$
   (b) $f(x) = \tan(x^2+3x), \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x^2+3x)}(2x+3)$
   (c) $f(x) = \sqrt{2x^2+3x}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}(2x^2+3x)^{-1/2}(4x+3)$
   (d) $f(x) = \ln\cos x, \quad f'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x)$
   (e) $f(x) = \sin(\cos(3x^2+\ln x)), \quad f'(x) = \cos(\cos(3x^2+\ln x))(-\sin(3x^2+\ln x))(6x+\frac{1}{x})$
   (f) $f(x) = \frac{\ln(\sin x)}{x^2+1}, \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{\sin x}\cos x(x^2+1) - \ln(\sin x)(2x)}{(x^2+1)^2}$

7. Logaritmikus differenciálás. Abban az esetben, amikor az alap és a kitevő is függ x-től, a következő trükk segítségével deriválhatunk: például

$$f(x) = x^x,$$

ekkor vesszük mindkét oldal logaritmusát:

$$\ln f(x) = x\ln x,$$

mindkét oldalt deriválva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{f(x)}f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1,$$

amiből $f(x)$-szel szorozva kapjuk a végeredményt:

$$f'(x) = f(x)(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

Ennek mintájára oldjuk meg a következőket:

(a) $f(x) = (1+x)^{1-x}$, $\ln f(x) = (1-x)\ln(1+x)$, $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\ln(1+x) + (1-x)\frac{1}{1+x}$, $f'(x) = (1+x)^{1-x}(-\ln(1+x) + \frac{1-x}{1+x})$.

(b) $f(x) = (\sin x)^x$, $\ln f(x) = x \ln \sin x$, $f'(x) = (\sin x)^x(\ln \sin x + x(\frac{1}{\sin x})\cos x)$

(c) $f(x) = \sqrt[x]{1+x^2}$, $\ln f(x) = \frac{1}{x}\ln(1+x^2)$, $f'(x) = \sqrt[x]{1+x^2}(-x^{-2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{x}\frac{1}{1+x^2}2x)$

(d) $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$, $\ln f(x) = \sin x \ln \sin x$, $f'(x) = (\sin x)^{\sin x}(\cos x \ln \sin x + \sin x \frac{1}{\sin x}\cos x)$

(e) $f(x) = (\ln x)^{\lg x}$, $\ln f(x) = \lg x \ln \ln x$, $f'(x) = (\ln x)^{\lg x}(\frac{1}{x}\frac{1}{\ln 10}\ln \ln x + \lg x \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x})$

8. A következő feladatok teljesen vegyesek:

(a) $f(x) = x^3 \ln x$, $f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2$

(b) $f(x) = e^x(3x^2 - 4x)$, $f'(x) = e^x(3x^2 - 4x) + e^x(6x - 4)$

(c) $f(x) = x \sin x \ln x$, $f'(x) = \sin x \ln x + x(\cos x \ln x + \sin x \frac{1}{x})$

(d) $f(x) = 2^x \sin x \log_2 x$, $f'(x) = 2^x \ln 2 \sin x \log_2 x + 2^x(\cos x \log_2 x + \sin x \frac{1}{x}\frac{1}{\ln 2})$

(e) $f(x) = 3^x(3x^7 - 8x^2 + 1)$, $f'(x) = 3^x \ln 3(3x^7 - 8x^2 + 1) + 3^x(21x^6 - 16x)$

(f) $f(x) = \sin^3 x$, $f'(x) = 3\sin^2 x \cos x$

(g) $f(x) = \sin x^3$, $f'(x) = \cos x^3 3x^2$

(h) $f(x) = \tan(4x^2 + 1)$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(4x^2+1)}8x$

(i) $f(x) = \sin(x^2 + 2x + 3)$, $f'(x) = \cos(x^2 + 2x + 3)(2x + 2)$

(j) $f(x) = \sqrt[3]{x - 3x^5}$, $f'(x) = \frac{1}{3}(x - 3x^5)^{-\frac{2}{3}}(1 - 15x^4)$

Függvény folytonossága, deriválhatósága

1. A c paraméter mely értéke esetén lesz az

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{\sin x}{x} + 3 & \text{ha } x \neq 0 \\ c\cos x & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény folytonos?

Megoldás: $\lim_{x\to 0} 2x^2 + \frac{\sin x}{x} + 3 = 4$, tehát $c\cos 0 = 4$ kell a folytonossághoz, azaz $c = 4$.

2. Az a paraméter mely értéke esetén lesz az

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1) + 3 & \text{ha } x < 1 \\ x^3 + 2x & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

függvény folytonos az $x_0 = 1$ helyen? És milyen a esetén differenciálható az $x_0 = 1$ helyen?

Megoldás: $f(x_0) = f(1) = 3$. A jobboldali határérték ezzel megegyezik, hiszen az 1-nél nagyobb részen egy folytonos függvénnyel definiáltuk $f(x)$-et. Ahhoz, hogy folytonos legyen 1-ben, az kell, hogy a baloldali határérték is 3 legyen. Balról tartva 1-hez mindig az elso sorbeli definíció érvényes $f(x) - re$, azaz a baloldali határérték $a(1-1) + 3 = 0 + 3 = 3$, bármi is volt az a paraméter. Azaz f mindig folytonos x_0-ban. Nézzük a differenciálhatóságot: a jobboldali derivált x_0-ban $3x_0^2 + 2 = 5$, a baloldali derivált pedig a. A függvény akkor differenciálható, ha a jobboldali és baloldali deriváltja megegyezik, azaz ha $a = 5$.

3. A b és c paraméterek mely értékei esetén lesz az

$$f(x) = \begin{cases} 2x + b & \text{ha } x \leq 1 \\ \frac{x^2-7x+6}{x^2-8x+7} & \text{ha } 1 < x \leq 2 \\ c\sin\frac{\pi}{4}x & \text{ha } 2 < x \end{cases}$$

függvény folytonos?

Megoldás: Folytonosság az $x = 1$ pontban: $\lim_{x\to 1} 2x+b = 2+b$, másrészt $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-7x+6}{x^2-8x+7} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-6)(x-1)}{(x-7)(x-1)} = \frac{5}{6}$, ennek a kettőnek meg kell egyeznie, azaz $b = -7/6$. Ezenkívül $x = 2$-ben is folytonosság kell: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+6}{x^2-8x+7} = \frac{4}{5}$, illetve $\lim_{x\to 2} c\sin\frac{\pi}{4}2 = c\sin\frac{\pi}{2} = c$, ennek a kettőnek is meg kell egyezni, azaz $c = 4/5$.