Matematika A1 építőkari hallgatóknak

Integrálás gyakorlófeladatok MEGOLDÁSSAL

(2006. 11. 15.)

(gyak. vez.: Rudas Anna)

1. Hatványfüggvény: $\int x^2(x^2-1)\mathrm{d}x = \int (x^4-x^2)\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + C$
2. Hatványfüggvény: $\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \int x^{-2}\mathrm{d}x = -x^{-1} + C$
3. Hatványfüggvény: $\int \frac{\sqrt{x}-x+x^4}{x^2}\mathrm{d}x = \int (x^{-\frac{3}{2}} - x^{-1} + x^2)\mathrm{d}x = -2x^{-\frac{1}{2}} - ln|x| + \frac{x^3}{3} + C$
4. Hatványfüggvény: $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{x^3+x^2-3x-3}{3x^2}\mathrm{d}x = \int (\frac{x}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})\mathrm{d}x = \frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} - \ln|x| + \frac{1}{x} + C$
5. Rac. törtfüggvény, számláló foka nagyobb: $\int \frac{x^2-4x+7}{x-2}\mathrm{d}x = \int \frac{(x-2)^2+3}{x-2}\mathrm{d}x = \int (x-2+\frac{3}{x-2})\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x + 3\ln|x-2| + C$
6. Hatványfüggvény: $\int (2x + 3\sqrt{x} + \sqrt[3]{x+1})\mathrm{d}x = x^2 + 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} + C$
7. Rac. törtfüggvény, 1. típus: $\int \frac{3}{2x+5}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+\frac{5}{2}}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln|x+\frac{5}{2}| + C$
8. Rac. törtfüggvény, számláló foka megegyezik a nevező fokával: $\int \frac{3x+10}{2x+5}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x+5+\frac{5}{3}}{2x+5}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int (1+\frac{5}{6x+15})\mathrm{d}x = \frac{3x}{2} + \frac{3}{2}\frac{5}{6}\ln|x+\frac{15}{6}| + C$
9. Rac. törtfüggvény, 4. típus: $\int \frac{3}{2x^2+5}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+\frac{5}{2}}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\frac{2}{5}\int \frac{1}{(\sqrt{\frac{2}{5}}x)^2+1}\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{2}}\arctan(\sqrt{\frac{2}{5}}x) + C$, hiszen a helyettesítés: $t = \sqrt{\frac{2}{5}}x, \quad x = \sqrt{\frac{5}{2}}t, \quad \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t$
10. Rac. törtfüggvény, 5. típus: $\int \frac{3x}{2x^2+5}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int \frac{4x}{2x^2+5}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\ln(2x^2+5) + C$
11. Rac. törtfüggvény, 5. típus + 4. típus: $\int \frac{3x+10}{2x^2+5}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\ln(2x^2+5) + 2\sqrt{\frac{5}{2}}\arctan(\sqrt{\frac{2}{5}}x) + C$ (ld. az előző két feladatot!)
12. Rac. törtfüggvény, számláló fokszáma nagyobb, majd 1. típus: $\int \frac{3x^2}{2x+5}\mathrm{d}x = \int \frac{(2x+5)(\frac{3}{2}x-\frac{15}{4})+\frac{75}{4}}{2x+5}\mathrm{d}x = \int (\frac{3}{2}x - \frac{15}{4} + \frac{75}{8x+20})\mathrm{d}x = \frac{3x^2}{4} - \frac{15x}{4} + \frac{75}{8}\ln|x+\frac{20}{8}| + C$
13. Rac. törtfüggvény, számláló foka megegyezik a nevezőével, majd 4. típus: $\int \frac{3x^2}{2x^2+5}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{3}{2}(2x^2+5)-\frac{15}{2}}{2x^2+5}\mathrm{d}x = \int (\frac{3}{2} - \frac{15}{4x^2+10})\mathrm{d}x = \frac{3x}{2} - \frac{15}{4}\int \frac{1}{x^2+\frac{10}{4}}\mathrm{d}x = \frac{3x}{2} - \frac{15}{4}\frac{4}{10}\int \frac{1}{(\frac{2x}{\sqrt{10}})^2+1}\mathrm{d}x = \frac{3x}{2} - \frac{3}{2}\frac{\sqrt{10}}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t = \frac{3x}{2} - \frac{3\sqrt{10}}{4}\arctan(\frac{2x}{\sqrt{10}}) + C$, hiszen a helyettesítés: $t = \frac{2}{\sqrt{10}}x, \quad x = \frac{\sqrt{10}}{2}t, \quad \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{10}}{2}\mathrm{d}t$
14. 2. típus: $\int \frac{3}{\sqrt{2x+5}}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int 2(2x+5)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = 3(2x+5)^{\frac{1}{2}} + C$

15. 3. típus: $\int \frac{3x}{\sqrt{2x+5}}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+5)-\frac{15}{2}}{\sqrt{2x+5}}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int\sqrt{2x+5}\mathrm{d}x - \frac{15}{2}\int\frac{1}{\sqrt{2x+5}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(2x+5)^{\frac{3}{2}} - \frac{15}{2}(2x+5)^{\frac{1}{2}} + C$

16. Helyettesítés: $\int \frac{3}{\sqrt{2x^2+5}}\mathrm{d}x = \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}((\sqrt{\frac{2}{5}}x)^2+1)}}\mathrm{d}x = \frac{3}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{5}{2}}\int\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t = \frac{3}{\sqrt{2}}arsh(\sqrt{\frac{2}{5}}x) + C$, hiszen a helyettesítés: $t = \sqrt{\frac{2}{5}}x, \quad x = \sqrt{\frac{5}{2}}t, \quad \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t$

17. $f'(x)f^n(x)$ alakú: $\int \frac{3x}{\sqrt{2x^2+5}}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int 4x(2x^2+5)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}(2x^2+5)^{\frac{1}{2}} + C$

18. Vegyes (összegre bontás és két helyettesítés + ch és sh azonosságai): $\int \frac{3x^2+4x+7{,}5}{\sqrt{2x^2+5}}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{3}{2}(2x^2+5)+4x}{\sqrt{2x^2+5}}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int\sqrt{2x^2+5}\mathrm{d}x + \int\frac{4x}{\sqrt{2x^2+5}}\mathrm{d}x.$

    Az összeg első felének számolása: $\frac{3}{2}\int\sqrt{2x^2+5}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\sqrt{2}\int\sqrt{x^2+\frac{5}{2}}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\int\sqrt{(\sqrt{\frac{2}{5}}x)^2+1}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\sqrt{2}\frac{5}{2}\int\sqrt{sh^2t+1}cht\mathrm{d}t = \frac{15\sqrt{2}}{4}\int ch^2t\mathrm{d}t = \frac{15\sqrt{2}}{4}\int\frac{ch2t+1}{2}\mathrm{d}t = \frac{15\sqrt{2}}{4}\frac{sh2t}{4} + \frac{15\sqrt{2}}{8}t + C = \frac{15\sqrt{2}}{4}(\frac{sh2arsh(\sqrt{\frac{2}{5}}x)}{4} + \frac{arsh(\sqrt{\frac{2}{5}}x)}{2}) + C$, mert a helyettesítés: $sht = \sqrt{\frac{2}{5}}x, \quad x = \sqrt{\frac{5}{2}}sht, \quad \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{5}{2}}cht\mathrm{d}t$, és $t = arsh(\sqrt{\frac{2}{5}}x)$.

    Az összeg második felének számolása: $\int 4x(2x^2+5)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = 2(2x^2+5)^{\frac{1}{2}} + C$.

    A feladat megoldása tehát a kettő összege: $\int\frac{3x^2+4x+7{,}5}{\sqrt{2x^2+5}}\mathrm{d}x = \frac{15\sqrt{2}}{4}(\frac{sh2arsh(\sqrt{\frac{2}{5}}x)}{4} + \frac{arsh(\sqrt{\frac{2}{5}}x)}{2}) + 2(2x^2+5)^{\frac{1}{2}} + C$.

19. Hatványfüggvény, exponenciális függvény (alap): $\int(x^5+5^x)\mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} + \frac{5^x}{\ln 5} + C$

20. Trigonometrikus (alap): $\int(4\sin x - 3\cos x)\mathrm{d}x = -4\cos x - 3\sin x + C$

21. f'/f alakú: $\int\tan x\mathrm{d}x = \int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$

22. Trigonometrikus átalakítás: $\int\tan^2 x\mathrm{d}x = \int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int(\frac{1}{\cos^2 x}-1)\mathrm{d}x = -\cot x - x + C$

23. Trigonometrikus átalakítás: $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x = \int\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x = \sin x - \cos x + C$

24. Hiperbolikus átalakítás: $\int\frac{1}{\sinh x+\cosh x}\mathrm{d}x = \int\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\sinh x+\cosh x}\mathrm{d}x = \sinh x - \cosh x + C$

25. Trigonometrikus átalakítás: $\int\sin^2 x\mathrm{d}x = \int\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$

26. f'/f alakú: $\int\frac{e^x}{e^x+11}\mathrm{d}x = \ln(e^x+11) + C$

27. f'/f alakú: $\int\frac{\cos 3x}{8+\sin 3x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|\sin 3x + 8| + C$

28. f'/f alakú: $\int\frac{1}{x(\ln x+2003)}\mathrm{d}x = \ln|\ln x + 2003| + C$

29. $f' \cdot f^n$ alakú: $\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int 2x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

30. $f' \cdot f^n$ alakú: $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+1} + C$

31. $f' \cdot f^n$ alakú: $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{\sin x} + C$

32. $f' \cdot f^n$ alakú: $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\sqrt{\ln x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} + C$

33. $f' \cdot f^n$ alakú: $\int \sqrt[3]{\cos^7 x}\sin x\mathrm{d}x = \frac{3}{10}(\cos x)^{\frac{10}{3}} + C$

34. alapintegrál: $\int e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-x} + C$

35. exponenciális függvény: $\int 5^{2-3x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\frac{5^{2-3x}}{\ln 5} + C$

36. Helyettesítés: $\int e^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x = e^{\sin x} + C + C$, itt a helyettesítés: $t = \sin x, \quad \mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x$.

37. $f' \cdot f^n$ alakú: $\int x\sqrt{25+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(25+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

38. $f' \cdot f^n$ alakú: $\int \frac{14}{(6-4x)^7}\mathrm{d}x = -\frac{7}{2}\int(-4)(6-4x)^{-7}\mathrm{d}x = \frac{7}{12}(6-4x)^{-6} + C$

39. $f' \cdot f$ alakú: $\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = frac\ln^2 x2 + C$

40. Parciális ($u = x, \quad v' = \sin 3x$): $\int x\sin 3x\mathrm{d}x = -frac13x\cos 3x + \int \cos 3x\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\frac{1}{3}\sin 3x + C$

41. Parciális (átalakítás után majdnem ua. mint az előző): $\int x\sin x\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x\sin 2x\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C$

42. Összeggé bontás után kétszer parciális ($u_1 = 2x, \quad v_1' = -\cos x$ és $u_2 = x, \quad v_2' = \sin x$): $\int(x^2-1)\sin x\mathrm{d}x = \int x^2\sin x\mathrm{d}x - \int \sin x\mathrm{d}x = -x^2\cos^2 x + 2\int x\cos x\mathrm{d}x + \cos x = -x^2\cos x + 2x\sin x + 3\cos x + C$

43. Parciális ($u = \ln x, \quad v' = 1$): $\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x\int 1\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$

44. Két módszer:

    (a) Parciális ($u = \ln x, \quad v' = \ln x$, felhasználva az előző feladat eredményét): $\int \ln^2 x\mathrm{d}x = \ln x(x\ln x - x) - \int(\ln x - 1)\mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$

    (b) Helyettesítés ($t = \ln x, \quad x = e^t, \quad \mathrm{d}x = e^t\mathrm{d}t$), majd kétszer parciális: ezzel is ugyanaz az eredmény.

45. Parciális, ugyanaz az ismeretlen integrál a jobboldalon, tehát egyenletrendezésből kijön: $\int x^2\ln x\mathrm{d}x = x^2(x\ln x - x) - \int 2x(x\ln x - x)\mathrm{d}x = x^3\ln x - x^3 - 2\int x^2\ln x\mathrm{d}x + \frac{2}{3}x^3$, ebből a kérdezett integrál $\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3$.