Matematika A1 építőkari hallgatóknak

Integrálás összefoglaló

(gyak. vez.: Rudas Anna)

1. Integrálási módszerek

1. Az integrandus $f(ax+b)$ alakú

   $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int af(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{F(ax+b)}{a} + C$, ahol F az f függvény primitív függvénye, például:

   $\int (3x+2)^3\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\frac{(3x+2)^4}{4} + C = \frac{1}{12}(3x+2)^4 + C$

   Feladatok: integráljuk ki e^{5x+4}, $\sin 6x - 4$, $\frac{5}{\cos^2(-6x+4)}$, $\sinh(2-7x)$

2. Az integrandus $f^n(x)f'(x)$ alakú

   $\int f^n(x)f'(x)\mathrm{d}x = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$, például:

   $\int x^2(2x^3+4)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int 6x^2(2x^3+4)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\frac{(2x^3+4)^2}{2} + C$

   Feladatok: integráljuk ki $\sin x\cos x$, $\frac{\ln x}{x}$, $e^x(1-e^x)^3$, $\frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}$

3. Az integrandus $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakú

   $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$, például:

   $\int \frac{2x}{x^2+7}\mathrm{d}x = \ln(x^2+7) + C$

   Feladatok: integráljuk ki $\tan x$, $\frac{1}{x\ln x}$, $\frac{-\sin 2x}{5+\cos^2 x}$, $\frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}$

4. Integrálás helyettesítéssel

   $\int f(u(x))\mathrm{d}x$ esetén alkalmazhatjuk a $t = u(x)$ helyettesítést, ebből az egyenletből x kifejezhető, és $\mathrm{d}x$ helyébe az inverz függvény deriváltjával megszorzott $\mathrm{d}t$ kerül, például:

   $\int (3x+2)^3\mathrm{d}x$, ekkor legyen $t = 3x+2$, ezzel $x = \frac{t-2}{3}$, azaz $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}t$, és így

   $\int (3x+2)^3\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int t^3\mathrm{d}t = \frac{t^4}{12} + C = \frac{1}{12}(3x+2)^4 + C$

   Feladatok: integráljuk ki $\frac{e^x}{e^{2x}+1}$, $x\sqrt{5x+3}$, $\sqrt{1-x^2}$, $x\sqrt{1+x^2}$

5. Parciális integrálás

   $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$, ennek használatát a feladatok során láthatjuk, például:

   $\int xe^{5x}\mathrm{d}x$ esetén $v = x$, $u' = e^{5x}$, ezzel tehát $v' = 1$, $u = \frac{1}{5}e^{5x}$, azaz

   $\int xe^{5x}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}xe^{5x} - \int \frac{1}{5}e^{5x}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{e^{5x}}{25} + C$

   Feladatok: integráljuk ki $\ln x, x\sin 2x$, $2x\arctan x$, $e^{2x}\sin x$

2. Racionális törtfüggvények

A törtet addig alakítjuk, amíg el nem érjük, hogy a számláló foka kisebb legyen, mint a nevezőé. Ezután általában a következő alapesetek valamelyikéhez jutunk:

1. típus: $\int \frac{A}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{A}{a}\int \frac{a}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{A}{a}\ln|ax+b|+C$, például:
   $\int \frac{5}{3x+2}\mathrm{d}x = \frac{5}{3}\ln|3x+2|+C$
2. típus: $\int \frac{A}{(ax+b)^n}\mathrm{d}x = \frac{A}{a}\int a(ax+b)^{-n}\mathrm{d}x = \frac{A}{a}\frac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1}+C$ (itt $n \neq 1$), például:
   $\int \frac{5}{(3x+2)^3}\mathrm{d}x = \frac{5}{3}\frac{(3x+2)^{-2}}{-2}$
3. típus: $\int \frac{Ax}{(ax+b)^n}\mathrm{d}x = \frac{A}{a}\int \frac{ax+b-b}{(ax+b)^n}$ (itt $n \neq 1$), azaz összeggé bontva az előbbiek szerint megoldható, például:
   $\int \frac{5x}{(3x+2)^3}\mathrm{d}x = \frac{5}{3}\int \frac{3x+2-2}{(3x+2)^3}\mathrm{d}x = \frac{5}{3}\int \frac{1}{(3x+2)^2}\mathrm{d}x - \frac{5}{3}\int \frac{2}{(3x+2)^3}\mathrm{d}x = \frac{5}{9}\int 3(3x+2)^{-2}\mathrm{d}x - \frac{10}{9}\int 3(3x+2)^{-3}\mathrm{d}x = \frac{5}{9}\frac{(3x+2)^{-1}}{-1} - \frac{10}{9}\frac{(3x+2)^{-2}}{-2}+C$
4. típus: a nevező olyan másodfokú polinom, aminek valós gyökei vannak, ekkor parciális törtekkel két elsőfokú nevezőjűvé lehet bontani, például:
   $\frac{3x+2}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{-5}{x-1}+\frac{8}{x-2}\mathrm{d}x = -5\ln|x-1|+8\ln|x-2|+C$
5. típus: a nevező olyan másodfokú polinom, aminek nincs valós gyöke, ekkor visszavezetjük egy ln és egy arctan összegére, például:
   $\int \frac{x+3}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+8}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+5| + \int \frac{1}{1+(\frac{x-1}{2})^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+5|+2\arctan(\frac{x-1}{2})+C$

3. Trigonometrikus függvények hatványai

1. Ha sin páratlan, cos bármilyen (nem első) hatványon szerepel
   Ekkor $\sin^{2n+1}x = \sin x\sin^{2n}x = \sin x(1-\cos^2 x)^n$ átalakítással minden szépen alakul, például:
   $\int \sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x = \int \sin x(1-\cos^2 x)\cos x\mathrm{d}x = \int(\sin x\cos x - \sin x\cos^3 x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{4}\cos^4 x + C$
   Feladat: integráljuk ki $\sin^3 x$
2. Ha cos páratlan, sin bármilyen (nem első) hatványon szerepel
   Ekkor ugyanezt csináljuk fordítva: $\cos^{2n+1}x = \cos x\cos^{2n}x = \cos x(1-\sin^2 x)^n$, például:
   $\int \cos^3 x\sin^2 x\mathrm{d}x = \int \cos x(1-\sin^2 x)\sin x\mathrm{d}x = \int(\cos x\sin x - \cos x\sin^3 x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{4}\sin^4 x + C$
   Feladatok: integráljuk ki $\cos^3 x$
3. Ha sin és cos is páros kitevőn szerepel
   Ekkor pedig a $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ illetve $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ azonosságokat használjuk, például:
   $\int \cos^2 x\mathrm{d}x = \int(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$
   Feladat: integráljuk ki $\sin^2 x\cos^2 x$