Matematika A1 építőkari hallgatóknak

Komplex számok (2006. 09. 13.)

(gyak. vez.: Rudas Anna)

1. Algebrai alak $\leftrightarrow$ trigonometrikus alak ($\leftrightarrow$ exponenciális alak)

   A komplex számokat (z) a síkon ábrázolva kétféle módon jellemezhetjük: egyrészt a valós tengelyre ill. a képzetes tengelyre vonatkozó koordinátáikkal (ez az algebrai alak), másrészt a z-nek megfelelő vektor hosszával (r) és a vektornak a valós tengellyel bezárt szögével (φ), ez a trigonometrikus alak. (Az r és φ adatok segítségével felírhatjuk a számot ún. exponenciális alakban is.) Azaz

   $$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (= re^{i\varphi}),$$

   ahol $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ a komplex számnak megfelelő vektor hossza és $\varphi = \arctan b/a$ a valós tengellyel bezárt szöge.

   Adjuk meg az alábbi számok algebrai alakját!

   (a) $r = 2$, $\varphi = 30°$
   (b) $r = 3$, $\varphi = -45°$
   (c) $r = 4$, $\varphi = \pi/2$
   (d) $r = 0$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

   Adjuk meg az alábbi számok trigonometrikus alakját!

   (a) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
   (b) -3
   (c) $1 + i$
   (d) $-\sqrt{3} + i$

2. Osztás, szorzás trigonometrikus alakban

   Algebrai alakban adott komplex számok szorzása és osztása az előadáson elhangzott módon történik, ld. a feladatokban.

   Trigonokmetrikus alakban a következőképpen történik a szorzás és osztás: ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor

   $$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

   és

   $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

   tehát a komplex számoknak megfelelő vektorok hossza a valós számoknál megszokott módon szorzódik (osztódik), a vektorok szöge pedig szorzás esetén összeadódik, míg osztáskor kivonódik.

   Számítsuk ki az alábbi szorzatok és hányadosok értékét!

   (a) $(1 + 2i)(-3i) = ?$
   (b) $z_1 = 3(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$, $\quad z_2 = \frac{1}{3}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$, $\quad z_1 z_2 = ?$
   (c) $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $\quad z_2 = 2(\cos 80° + i\sin 80°)$, $\quad z_1 z_2 = ?$
   (d) $\frac{2+3i}{4-i} = ?$
   (e) $z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$, $\quad z_2 = \sqrt{3}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$, $\quad \frac{z_1}{z_2} = ?$

3. Hatványozás, gyökvonás

   Hatványozás és gyökvonás komplex számok esetén trigonometrikus alakban történik. Hatványozás: ha $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ és n valós, akkor

   $$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

   A gyökvonás bonyolultabb, mert komplex számok esetén nem egyértelmű művelet a gyökvonás. Ha n-edik gyökét keressük egy számnak, akkor n megoldás létezik, ezek mindegyikét meg kell találni, a következőképpen: ha $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, akkor

   $$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}),$$

   ahol $0 \leq k \leq n-1$, k egész szám.

   Adjuk meg az alábbi kifejezések értékét trigonometrikus alakban!

   (a) $(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}))^4$
   (b) $(2\sqrt{3} + 2i)^3$
   (c) $(2\sqrt{3} + 2i)^{-4}$
   (d) $\sqrt{2 + 2\sqrt{3}i}$
   (e) $\sqrt{1}$, $\sqrt{-1}$
   (f) $\sqrt[3]{-4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}}$
   (g) $\sqrt[4]{-4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}}$

4. Komplex változós egyenletek

   Az eddigiek felhasználásával oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

   (a) $(z - i)(4 - i) = 10i - 6$
   (b) $(1 - i)^{-8} = iz$
   (c) $z^3 + 16z = 0$
   (d) $z^5 + 32 = 0$
   (e) $\frac{1+i}{1-i} = (1 - z)^3$
   (f) $z^2 - 4z + 10 = 0$
   (g) $z^2 + iz + \frac{\sqrt{3}}{4}i = 0$