

Matematika A2 építőkori hallgatóknak

Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok I. (2012. 10. 08.)

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\left. \begin{array}{rrrrr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 22 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 24 \end{array} \right\}$$

2. Az alábbi A, B, C, D mátrixok lineáris egyenletrendszereket reprezentálnak. Határozzuk meg a megoldást!

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right), B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), C = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), D = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

3. Határozzuk meg k értékét úgy, hogy a következő egyenletrendszer megoldható legyen, és határozzuk meg a megoldást!

$$\left. \begin{array}{rrrrr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 4 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & - & 3x_4 & = & k \\ & - & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & -3 \end{array} \right\}$$

4. Határozzuk meg a következő mátrixok determinánsát!

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, D = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}, E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}, F = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

5. Oldjuk meg Cramer-szabállyal az alábbi egyenletrendszereket!

$$\left. \begin{array}{rrrr} x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & -4 \\ 4x & + & y & + & 4z & = & -2 \end{array} \right\}, \text{ illetve } \left. \begin{array}{rrrr} 2x & - & 5y & + & 3z & = & -4 \\ 3x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ x & - & 3y & + & 5z & = & -6 \end{array} \right\}$$

6. Oldjuk meg a következő homogén lineáris egyenletrendszereket:

$$\left. \begin{array}{rrrr} x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & - & 5y & + & 4z & = & 0 \end{array} \right\}, \text{ illetve } \left. \begin{array}{rrrr} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ 5x & + & 4y & & & = & 0 \end{array} \right\}$$

7. Független-e az alábbi vektorrendszer?

(a) $\{a_1 = (1, 2, 0), a_2 = (0, 0, 1), a_3 = (1, 1, 1)\}$

(b) $\{a_1 = (1, 2, 0), a_2 = (2, 4, 5), a_3 = (0, 0, 1)\}$

8. Az a és b paraméterek különböző értékeire hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek?

$$\left. \begin{array}{rrrr} x & + & y & + & z & = & 5 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 9 \\ x & + & 3y & + & az & = & b \end{array} \right\}$$

9. Tekintsük a következő egyenletrendszert!

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & -2 \\ 3 & 14 & 23 & -8 \\ -2 & 0 & -6 & -4 \\ 4 & 1 & 13 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 40 \\ -8 \\ q \end{bmatrix}$$

- (a) A p és q paraméterek mely értéke mellett nincs megoldás?
- (b) Lehet-e úgy választani a paramétereket, hogy pontosan 1 megoldás legyen?
- (c) hogy végtelen sok megoldás legyen?
- (d) Mi a megoldás (van-e), ha $p = 18$ és $q = 19$?

10. Tekintsük a következő egyenletrendszert!

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \\ 4 & 14 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Meg lehet-e választani a t paraméter értékét (hogyan?), úgy, hogy

- (a) pontosan egy megoldás legyen
- (b) ne legyen megoldás
- (c) végtelen sok megoldás legyen