Villamosmérnök A4

2. gyakorlat (2012. 09. 17.-18.)

Feltételes valószínűség, függetlenség

1. Egy szabályos dobókockával dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 6-ost dobunk, ha tudjuk, hogy

   (a) párosat dobunk?

   $$\mathbb{P}(\text{6-os}|\text{páros}) = \frac{\mathbb{P}(\text{6-os és páros})}{\mathbb{P}(\text{páros})} = \frac{\mathbb{P}(\text{6-os})}{\mathbb{P}(\text{páros})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

   (b) legalább 3-ast dobunk?

   $$\mathbb{P}(\text{6-os}|\text{legalább 3-as}) = \frac{\mathbb{P}(\text{6-os és legalább 3-as})}{\mathbb{P}(\text{legalább 3-as})} = \frac{\mathbb{P}(\text{6-os})}{\mathbb{P}(\text{legalább 3-as})} = \frac{1/6}{2/3} = \frac{1}{4}$$

   (c) legfeljebb 5-öst dobunk?

   $$\mathbb{P}(\text{6-os}|\text{legfeljebb 5-ös}) = \frac{\mathbb{P}(\text{6-os és legfeljebb 5-ös})}{\mathbb{P}(\text{legfeljebb 5-ös})} = 0$$

2. (a) Huba kétgyerekes családból származik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Huba testvére lány?
   Megoldás: A család gyerekei sorrendben lehetnek: $(f,f),(f,l),(l,f),(l,l)$. Huba az f-ek közül bármelyik lehet egyenlő valószínűséggel, azaz ez összesen négy lehetőség. E négyből két esetben lány testvére van, tehát a keresett valószínűség $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

   (b) Béla király kétgyerekes családból származik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a testvére lány?
   Megoldás: A család gyerekei sorrendben itt is $(f,f),(f,l),(l,f),(l,l)$ lehetnek. Viszont az (f,f) esetben a király csak az idősebb fiútestvér lehet. Ez három egyenlő valószínűségű választás, és ebből két esetben lány a király testvére. Tehát a keresett valószínűség $\frac{2}{3}$.

   Megjegyzés: A fenti megoldásokban azzal a valószínűségi térrel modelleztük a kísérletet, hogy a kétgyerekes családok által produkált fiúgyermekek közül vettünk véletlenül egyet. Így minden fiú egyenlő volt, tehát az (f,f) családok kétszeres súllyal szerepeltek az (f,l) és (l,f) családokhoz képest. Egy másik modellezési lehetőség, talán kevésbé természetes, hogy bekopogunk véletlenül egy kétgyerekes családhoz, és megkérjük őket, hogy ha van fiúgyerekük, küldjék ki hozzánk. Most (a)-ban sikeres a kísérlet, ha kijön egy fiú (jelöljük ezen eseményt H-val); (b)-ben pedig akkor sikeres, ha kijön egy fiú, akinek nincs bátyja (jelöljük ezen eseményt BK-val). Így minden család egyenlő súllyal fog szerepelni a kísérletben, a kétfiús családok nem élveznek előnyt, és így a lánytestvérnek nagyobb feltételes valószínűsége lesz (a)-ban és (b)-ben is. Mégpedig:

   (a) $\mathbb{P}(H|(f,f)) = \mathbb{P}(H|(f,l)) = \mathbb{P}(H|(l,f)) = 1$ miatt kiszámolható, hogy

   $$\mathbb{P}\big((f,l) \text{ vagy } (l,f) \mid H\big) = 2/3\,.$$

   (b) $\mathbb{P}(BK|(f,f)) = 1/2$ és $\mathbb{P}(BK|(f,l)) = \mathbb{P}(BK|(l,f)) = 1$ miatt kiszámolható, hogy

   $$\mathbb{P}\big((f,l) \text{ vagy } (l,f) \mid BK\big) = 4/5\,.$$

3. Egy családban 3 gyerek van, és tudjuk, hogy van közöttük lány. Mennyi annak a valószínűsége, hogy van közöttük fiú is?

   Megoldás: Legyen L az az esemény, hogy van a gyerekek között lány, F pedig az, hogy van közöttük fiú. A kérdés ebben az esetben $\mathbb{P}(F|L)$, amire felírva a feltételes valószínűség definícióját kapjuk, hogy $\mathbb{P}(F|L) = \frac{\mathbb{P}(FL)}{\mathbb{P}(L)}$.
   Háromgyerekes család esetében egyszerűbb mind a számlálóban, mind a nevezőben a komplementer esemény számolásának módszerét alkalmazni. Azaz FL ("van lány és van fiú") eseményt úgy tekintjük, mint a $CsL + CsF$ ("csak lány van vagy csak fiú van") esemény komplementerét, az L ("van lány") eseményt pedig mint a CsF ("csak fiú van") komplementerét. Mivel a CsL és CsF események diszjunktak, ezért $\mathbb{P}(CsL + CsF) = \mathbb{P}(CsL) + \mathbb{P}(CsF)$.
   Összefoglalva

   $$\mathbb{P}(F|L) = \frac{1 - \mathbb{P}(CsL) - \mathbb{P}(CsF)}{1 - \mathbb{P}(CsF)} = \frac{3/4}{7/8} = \frac{6}{7}.$$

4. Aladár és Csilla randevúznak. Ha Csilla közvetlenül a randevú előtt megy fodrászhoz, akkor 90%, hogy elkésik a találkozóról. Tízszer olyan gyakran fordul elő, hogy késik a randevúról, mint az, hogy a randevú előtt fodrászhoz megy. Mi annak a valószínűsége, hogy Csilla fodrásznál volt, ha Aladár most éppen rá vár a mozi előtt?

   Megoldás: Legyen F az az esemény, hogy Csilla randevú előtt fodrászhoz megy, K pedig az az esemény, hogy Csilla késik. Mivel tízszer olyan gyakran fordul elő, hogy Csilla késik a randevúról, mint az, hogy randevú előtt fodrászhoz megy, ezért $\mathbb{P}(K) = 10\mathbb{P}(F)$. A feladat kérdése $\mathbb{P}(F|K)$, ami pedig

$$\mathbb{P}(F|K) = \frac{\mathbb{P}(FK)}{\mathbb{P}(K)} = \frac{\mathbb{P}(K|F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(K)} = \frac{\mathbb{P}(K|F)\mathbb{P}(F)}{10\mathbb{P}(F)} = \frac{0.9}{10} = 0.09.$$

5. A XI. kerületben a családok 36%-ának van kutyája, és 30%-ának van macskája. Azon családok közül, akiknek kutyájuk van, 22%-nak macskája is van.

   (a) A családok hány százalékának van kutyája és macskája is?

   (b) Azon családok közül, akiknek macskájuk van, hány százaléknak van kutyája is?

   Megoldás: Legyen K az az esemény, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott családnak kutyája van, M pedig az az esemény, hogy macskájuk van. Ekkor adottak: $\mathbb{P}(K) = 0.36$, $\mathbb{P}(M) = 0.3$, $\mathbb{P}(M|K) = 0.22$.

   (a) Ekkor a kérdés $\mathbb{P}(KM)$, ami pedig

$$\mathbb{P}(KM) = \mathbb{P}(M|K) \cdot \mathbb{P}(K) = 0.22 \cdot 0.36 = 0.0792.$$

   (b) Ekkor a kérdés $\mathbb{P}(K|M)$, ami pedig

$$\mathbb{P}(K|M) = \frac{\mathbb{P}(KM)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{\mathbb{P}(M|K) \cdot \mathbb{P}(K)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{0.22 \cdot 0.36}{0.3} = 0.264.$$

6. Egy urnában 3 piros, 5 fehér és 6 zöld golyó van. Kihúzunk közülük 3 golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy elsőre pirosat, másodikra fehéret, harmadikra zöldet húzunk, ha a kihúzott golyókat

   (a) visszatesszük,

   (b) nem tesszük vissza?

   Megoldás: A feladat megoldásához a feltételes valószínűségek szorzási szabályát használjuk. Legyen P az az esemény, hogy elsőre pirosat húzunk, F az, hogy másodikra fehéret és Z az, hogy harmadikra zöldet. Ekkor a kérdés $\mathbb{P}(PFZ)$.

   (a) $\mathbb{P}(PFZ) = \mathbb{P}(P) \cdot \mathbb{P}(F|P) \cdot \mathbb{P}(Z|FP) = \frac{3}{14} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{6}{14}$

   (b) $\mathbb{P}(PFZ) = \mathbb{P}(P) \cdot \mathbb{P}(F|P) \cdot \mathbb{P}(Z|FP) = \frac{3}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{6}{12}$

7. Egy pakli francia kártyát (azaz 52 lapot, melyek között összesen 4 ász van) véletlenszerűen négy játékosnak osztunk ki úgy, hogy mindenki 13-13 lapot kap. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindenkinek jutott ász?

   Megoldás: Legyen E_i az az esemény, hogy az i-edik játékos pontosan egy ászt kapott. Ekkor a feladat megválaszolásához a $\mathbb{P}(E_1E_2E_3E_4)$ valószínűséget kell kiszámolnunk a valószínűségek szorzási szabályának segítségével.

$$\mathbb{P}(E_1E_2E_3E_4) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2|E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3|E_1E_2) \cdot \mathbb{P}(E_4|E_1E_2E_3) =$$

$$= \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} \cdot \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{36}{12}}{\binom{39}{13}} \cdot \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{24}{12}}{\binom{26}{13}} \cdot \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{12}{12}}{\binom{13}{13}} = \frac{4! \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \simeq 0.105.$$

   A törtek számlálóiban mindig leszámoljuk, hogy az adott helyzetben hányféleképpen osztható egy darab ász a következő játékosnak. Az egyszerűsítés után kapott törtnek a jobb oldalon közvetlen jelentés is adható, ha meggondoljuk hányféleképpen osztható ki sorrendben a négy ász a négy különböző 13 darabos blokkba, illetve hányféleképpen osztható ki sorrendben a négy ász 52 helyre mindenféle megkötés nélkül.

8. A hallgatók 30%-a A csoportot, 45%-a B csoportot, a többiek pedig C csoportot írnak a vizsgán. Az A csoportot írók 60%-a, a B csoportot írók 80%-a, a C csoportot írók 25%-a lány. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott hallgató

   (a) lány,

   (b) C csoportot ír, feltéve, hogy lány?

   Megoldás: Legyenek A, B, C azok az esemény, hogy valaki A,B vagy C csoportot ír, és legyen L az az esemény, hogy valaki lány. Ekkor a szöveg alapján a következő valószínűségek ismertek: $\mathbb{P}(A) = 0.3$, $\mathbb{P}(B) = 0.45$, $\mathbb{P}(C) = 0.25$, $\mathbb{P}(L|A) = 0.6$, $\mathbb{P}(L|B) = 0.8$, $\mathbb{P}(L|C) = 0.25$.

   (a) A teljes valószínűségtételét használva kapjuk, hogy

   $$\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}(L|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(L|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(L|C)\mathbb{P}(C) = 0.3 \cdot 0.6 + 0.45 \cdot 0.8 + 0.25 \cdot 0.25$$

   (b) Bayes-tételt használva kapjuk, hogy

   $$\mathbb{P}(C|L) = \frac{\mathbb{P}(L|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(L|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(L|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(L|C)\mathbb{P}(C)} = \frac{0.25 \cdot 0.25}{0.3 \cdot 0.6 + 0.45 \cdot 0.8 + 0.25 \cdot 0.25}$$

9. Egy gyárban három gép működési idejére végeztek megfigyeléseket. Megállapították, hogy az I-es gép átlagosan a munkaidő 60%-ában dolgozik, a II-es a 65%-ában míg a III-as a 70%-ában. A gépek egymástól függetlenül működnek. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott időpillanatban

   (a) minden gép dolgozik,

   (b) pontosan az egyik gép dolgozik,

   (c) csak a III-as gép dolgozik,

   (d) legalább az egyik gép dolgozik,

   (e) pontosan két gép dolgozik?

   Megoldás: Legyen A_i $(i = 1, 2, 3)$ az az esemény, hogy az i-dik gép működik. Ekkor tudjuk, hogy $\mathbb{P}(A_1) = 0.6$, $\mathbb{P}(A_2) = 0.65$ és $\mathbb{P}(A_3) = 0.7$. A feladatok megoldásában felhasználjuk a független események szorzástételét.

   (a) $\mathbb{P}(A_1A_2A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) = 0.6 \cdot 0.65 \cdot 0.7$

   (b) $\mathbb{P}(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + \mathbb{P}(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3) + \mathbb{P}(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) = 0.6 \cdot 0.35 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.65 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.35 \cdot 0.7$

   (c) $\mathbb{P}(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) = \mathbb{P}(\bar{A}_1) \cdot \mathbb{P}(\bar{A}_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) = 0.4 \cdot 0.35 \cdot 0.7$

   (d) $1 - \mathbb{P}(\text{egyik gép sem dolgozik}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}_1) \cdot \mathbb{P}(\bar{A}_2) \cdot \mathbb{P}(\bar{A}_3) = 1 - 0.4 \cdot 0.35 \cdot 0.3$

   (e) $\mathbb{P}(A_1A_2\bar{A}_3) + \mathbb{P}(\bar{A}_1A_2A_3) + \mathbb{P}(A_1\bar{A}_2A_3) = 0.6 \cdot 0.65 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.65 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.35 \cdot 0.7$

10. Iszákos Iván a nap 2/3 részét a kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsma van, és Iván nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük Ivánt. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ötödikben ott lesz?

    Megoldás: Legyen K_i az az esemény, hogy Iván az i-edik kocsmában található $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Ekkor K_i-k egymást kizáró események és összegük valószínűsége 2/3, azaz például $\mathbb{P}(K_1 + K_2 + K_3 + K_4) = \mathbb{P}(K_1) + \mathbb{P}(K_2) + \mathbb{P}(K_3) + \mathbb{P}(K_4)$ teljesül. Iván nem válogatós, így $\mathbb{P}(K_i) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}, i = 1, 2, 3, 4, 5$. A K_5 esemény része a $\bar{K}_1\bar{K}_2\bar{K}_3\bar{K}_4$ eseménynek, ezért a keresett valószínűség

    $$\mathbb{P}\big(K_5 \mid \overline{K_1K_2K_3K_4}\big) = \frac{\mathbb{P}(K_5)}{\mathbb{P}\big(\overline{K_1K_2K_3K_4}\big)} = \frac{\mathbb{P}(K_5)}{\mathbb{P}\big(\overline{K_1 + K_2 + K_3 + K_4}\big)} =$$

    $$= \frac{\mathbb{P}(K_5)}{1 - \mathbb{P}(K_1) - \mathbb{P}(K_2) - \mathbb{P}(K_3) - \mathbb{P}(K_4)} = \frac{2/15}{1 - 2/15 - 2/15 - 2/15 - 2/15} = \frac{2}{7}.$$

11. Egy bináris csatornán a 0 jelet 1/3, az 1 jelet 2/3 valószínűséggel adják le. Hálózati zavarok miatt ha 0-t adnak le, akkor 1/4 valószínűséggel 1 érkezik, ha 1-et adnak le, akkor 1/5 valószínűséggel 0 érkezik.

(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 0-át kaptunk?

(b) Kaptunk egy 0-át. Mennyi annak a valószínűsége, hogy azt 0-ként adták le?

Megoldás: Legyen A_i az az esemény, hogy i jelet adtak ($i = 0, 1$), V_i az az esemény, hogy i-t kaptunk ($i = 0, 1$). Adottak a $\mathbb{P}(A_0) = 1/3$, $\mathbb{P}(A_1) = 2/3$, $\mathbb{P}(V_1|A_0) = 1/4$ illetve $\mathbb{P}(V_0|A_1) = 1/5$ valószínűségek.

(a) Használva a teljes valószínűség tételét kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(V_0) = \mathbb{P}(V_0|A_0) \cdot \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(V_0|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) =$$
$$= [1 - \mathbb{P}(V_1|A_0)] \cdot \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(V_0|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) = \left[1 - \frac{1}{4}\right] \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{23}{60}.$$

(b) Használva a Bayes-tételt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A_0|V_0) = \frac{\mathbb{P}(V_0|A_0) \cdot \mathbb{P}(A_0)}{\mathbb{P}(V_0|A_0) \cdot \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(V_0|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1)} = \frac{3/4 \cdot 1/3}{23/60} = \frac{15}{23}.$$

12. Az iskolában úgy hírlik egy tanító bácsiról, hogy igen szeszélyes. Ha valaki felkészült az órára, akkor is $0,35$ az esélye annak, hogy egyest kap. De ha nem készült fel, akkor $0,15$ a valószínűsége annak, hogy megússza a felelést egyes nélkül. Jancsika az esetek 60%-ában nem készül az órára. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

(a) felelésnél egyest kap,

(b) az egyest kapott Jancsika felkészült az órára?

Megoldás: Legyen K az az esemény, hogy Jancsi készül az órára, E az, hogy Jancsi egyest kap. Ekkor a szöveg alapján adottak: $\mathbb{P}(E|K) = 0.35$, $\mathbb{P}(\bar{E}|\bar{K}) = 0.15$, $\mathbb{P}(\bar{K}) = 0.6$.

(a) A teljes valószínűség tételét használva kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|K)\cdot\mathbb{P}(K)+\mathbb{P}(E|\bar{K})\cdot\mathbb{P}(\bar{K}) = \mathbb{P}(E|K)\cdot(1-\mathbb{P}(\bar{K}))+(1-\mathbb{P}(\bar{E}|\bar{K}))\cdot\mathbb{P}(\bar{K}) = 0.35\cdot0.4+0.85\cdot0.6.$$

(b) Bayes tételt használva kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(K|E) = \frac{\mathbb{P}(E|K) \cdot \mathbb{P}(K)}{\mathbb{P}(E|K) \cdot \mathbb{P}(K) + \mathbb{P}(E|\bar{K}) \cdot \mathbb{P}(\bar{K})} = \frac{\mathbb{P}(E|K) \cdot \mathbb{P}(K)}{\mathbb{P}(E|K) \cdot \mathbb{P}(K)} = \frac{0.35 \cdot 0.4}{0.35 \cdot 0.4 + 0.85 \cdot 0.6}.$$

13. Egy tesztet kell kitöltenünk, ami 20 kérdésből áll, mindegyikre igaz-hamis választ kell adnunk. Minden kérdésnél egymástól függetlenül három eset lehetséges: tudjuk a helyes választ, ennek $4/7$ a valószínűsége, vagy azt hisszük, hogy tudjuk, de tévedünk, ennek $2/7$ az esélye, a maradék $1/7$ valószínűségű eset az, amikor fogalmunk sincs, ekkor találomra, $1/2 - 1/2$ valószínűséggel írunk igazat vagy hamisat. Mi a valószínűsége, hogy

(a) az első kérdésre helyes választ adunk?

(b) legalább 14 kérdésre helyesen válaszolunk?

(c) ha egy kérdésre helyesen válaszolunk, az azért fordult elő, mert tudtuk a helyes választ?

Megoldás:

(a) Használva a teljes valószínűségtételét kapjuk, hogy

$$p = \mathbb{P}(\text{helyes a válasz}) = \frac{4}{7} \cdot 1 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2}$$

(b) Legalább 14 helyes válasz $14, 15 \ldots, 20$ helyes választ jelent. Az (a) részből tudjuk, hogy 1 kérdésre p valószínűséggel adunk helyes választ. Így

$$\mathbb{P}(\text{legalább 14 helyes válasz}) = \sum_{k=14}^{20} \binom{20}{k} p^k (1-p)^{20-k}$$

(c) Használva a Bayes-tételt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\text{tudtuk a választ}|\text{helyes a válasz}) = \frac{\frac{4}{7}\cdot 1}{\frac{4}{7}\cdot 1+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{8}{9}.$$

14. Egy választásnál a házaspárok részvételi arányát vizsgálták. Annak a valószínűsége, hogy a férj szavaz 3/5, hogy a feleség szavaz 1/2. A megfigyelések szerint azon családokban, ahol a férj elment szavazni, ott a feleségek 2/3 része is elment.

(a) Feltéve, hogy a feleség elment szavazni mi annak a valószínűsége, hogy a férj is elment?

(b) Véletlenszerűen kiválasztunk két családot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egyikük sem ment el szavazni?

(c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két házaspárból pontosan két ember ment el szavazni?

Megoldás: Legyen F_1 az az esemény, hogy a férj elment szavazni, míg F_2 az az esemény, hogy a feleség elment szavazni. Ekkor a feladat szövege alapján adottak a következőek: $\mathbb{P}(F_1) = 3/5$, $\mathbb{P}(F_2) = 1/2$ illetve $\mathbb{P}(F_2|F_1) = 2/3$.

(a) $\mathbb{P}(F_1|F_2) = \frac{\mathbb{P}(F_2|F_1)\cdot\mathbb{P}(F_1)}{\mathbb{P}(F_2)} = \frac{(2/3)\cdot(3/5)}{1/2} = \frac{4}{5}$

(b) A megadott adatok alapján kiszámolhatóak a következő valószínűségek: $\mathbb{P}(F_1F_2) = 2/5$, $\mathbb{P}(\bar{F_1}F_2) = 1/10$, $\mathbb{P}(F_1\bar{F_2}) = 1/5$, $\mathbb{P}(\bar{F_1}\bar{F_2}) = 3/10$. Ezalapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\text{senki nem ment el szavazni}) = \left(\frac{3}{10}\right)^2$$

(c) A (b) részben számoltak alapján: $\mathbb{P}$(2 férj, feleségek nem)+$\mathbb{P}$(2 feleség, férjek nem)+$\mathbb{P}$(férj és feleség egy családból)+$\mathbb{P}$(férj és feleség nem egy családból) $= (1/5)^2 + (1/10)^2 + (2/5)(3/10) + 2(1/5)(1/10)$.

15. Három pénzérmét dobok fel egyszerre. Majd ezek után annyi dobókockával dobok újra, ahány fejet dobtam az érmékkel. Tudjuk, hogy dobtam 6-ost. Ekkor mennyi annak a valószínűsége, hogy az érmékkel két fejet dobtam?

Megoldás: Legyen F_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ az az esemény, hogy az érménkkel i darab fejet dobunk, míg D az az esemény, hogy dobtunk 6-ost. Ekkor a feladat szövege alapján adott: $\mathbb{P}(F_0) = 1/8$, $\mathbb{P}(F_1) = 3/8$, $\mathbb{P}(F_2) = 3/8$, $\mathbb{P}(F_3) = 1/8$. A megadott feltételes valószínűségek számítása során a komplementer esemény számolásának módszerét alkalmazzuk: $\mathbb{P}(D|F_0) = 0$, $\mathbb{P}(D|F_1) = 1/6$, $\mathbb{P}(D|F_2) = 1 - 25/36 = 11/36$, $\mathbb{P}(D|F_3) = 1 - 125/216 = 91/216$. Felhasználva a Bayes-tételt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(F_2|D) = \frac{\mathbb{P}(D|F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(D|F_0)\mathbb{P}(F_0)+\mathbb{P}(D|F_1)\mathbb{P}(F_1)+\mathbb{P}(D|F_2)\mathbb{P}(F_2)+\mathbb{P}(D|F_3)\mathbb{P}(F_3)} = \frac{\frac{11}{36}\cdot\frac{3}{8}}{0\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}+\frac{11}{36}\cdot\frac{3}{8}+\frac{91}{216}\cdot\frac{1}{8}}$$

16. Egy dobókockával kétszer dobtam. Függetlenek-e az alábbi események?

- A: a dobott összeg páros
- B: a dobott összeg hárommal osztható

Megoldás: A feladat megoldásához felhasználjuk a független események szorzástételét.

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(\text{dobott összeg 6 vagy 12}) = \frac{5+1}{36}(=)\frac{1+3+5+5+3+1}{36}\cdot\frac{2+5+4+1}{36} = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$$

Tehát az események függetlenek.

17. Háromgyerekes családoknál függetlenek-e az alábbi események?

- A: az első gyerek fiú
- B: az első kér gyerek különböző nemű
- C: az első és utolsó gyerek neme megegyezik

Megoldás: A feladat megoldásához felhasználjuk a független események szorzástételét.

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(\text{első gyerek fiú, a második lány}) = \frac{2}{8}(=)\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{8} = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$$
$$\mathbb{P}(AC) = \mathbb{P}(\text{első és harmadik gyerek fiú}) = \frac{2}{8}(=)\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{8} = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(C)$$
$$\mathbb{P}(BC) = \mathbb{P}(FLF, LFL) = \frac{2}{8}(=)\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{8} = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$$
$$\mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(FLF) = \frac{1}{8}(=)\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{8} = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)$$

A fenti egyenlőségek teljesülése miatt a három esemény független.

18. Huba és Tihamér céltáblára lőnek. Huba 60%, Tihamér pedig 70% valószínűséggel talál. Mindketten egyszer-egyszer lőnek egymástól függetlenül. Mennyi lesz annak a valószínűsége, hogy

    (a) nem lesz találat a céltáblán,

    (b) legalább az egyikőjük eltalálja a céltáblát,

    (c) mindketten eltalálják a céltáblát?

    Megoldás: Legyen H az az esemény, hogy Huba talál, és T az, hogy Tihamér talál. Ekkor a szöveg alapján adottak: $\mathbb{P}(H) = 0.6$, $\mathbb{P}(T) = 0.6$. A valószínűségek kiszámításában használjuk majd a független események szorzástételét.

    (a) $\mathbb{P}(\bar{H}\bar{T}) = \mathbb{P}(\bar{H})\cdot\mathbb{P}(\bar{T}) = 0.4\cdot 0.3$

    (b) $1 - \mathbb{P}(\text{nem lesz találat}) = 1 - 0.4\cdot 0.3$

    (c) $\mathbb{P}(HT) = \mathbb{P}(H)\cdot\mathbb{P}(T) = 0.6\cdot 0.7$

19. Az A városból B városba kétféleképpen lehet menni: közvetlenül illetve C városon keresztül (A-ból C-be, majd C-ből B-be). Télen mind a három út p-p valószínűséggel járhatatlan egymástól függetlenül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy el lehet jutni A-ból B-be?

    Megoldás: Jelöljük a keresett eseményt $A \Longleftrightarrow B$-vel és az X és Y városok közötti út átjárhatóságát $X \leftrightarrow Y$-nal illetve nem átjárhatóságát $X \not\leftrightarrow Y$-nal. Ekkor használva a teljes valószínűség tételét és az utak átjárhatóságának függetlenségét kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A \Longleftrightarrow B) = \mathbb{P}(A \Longleftrightarrow B \mid A \leftrightarrow B)\mathbb{P}(A \leftrightarrow B) + \mathbb{P}(A \Longleftrightarrow B \mid A \not\leftrightarrow B)\mathbb{P}(A \not\leftrightarrow B) =$$
$$= 1\cdot(1-p) + \mathbb{P}(A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C)\cdot p = 1 - p + (1-p)^2\cdot p.$$

20. Egy vetélkedőn egy házaspár alkot egy csapatot. Amikor a műsorvezetőtől egy eldöntendő kérdést kapnak, a férj és a feleség is egymástól függetlenül p-p valószínűséggel mondaná a helyes választ. Az alábbiak közül melyik a jobb stratégia?

    (a) Egyiküket kijelölik, aki a másikra nem hallgatva válaszol a kérdésre, vagy

    (b) mindketten gondolkodnak a kérdésen, és ha egyetértenek válaszolnak, ha pedig különböző a véleményük, akkor feldobnak egy szabályos pénzérmét, hogy eldöntsék meyikük véleményét fogják válaszolni?

    (a) Tudjuk, hogy egymástól függetlenül p valószínűséggel adnak helyest választ a feltett kérdésre. Ezért ebben az esetben a helyes választ p valószínűséggel adja a csapat.

    (b) Legyen E az az esemény, hogy a csapat a helyes eredményt adja, J illetve R pedig az, hogy a feleség vagy a férj a jó illetve a rossz választ adná (azaz pl. (J, J) az az esemény, amikor mindketten a helyes választ tudnák). Ekkor a teljes valószínűség tételét és a válaszadások függetlenségét használva kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|(J,J))\cdot\mathbb{P}((J,J)) + \mathbb{P}(E|(J,R))\cdot\mathbb{P}((J,R)) +$$
$$+ \mathbb{P}(E|(R,J))\cdot\mathbb{P}((R,J)) + \mathbb{P}(E|(R,R))\cdot\mathbb{P}((R,R)) =$$
$$= 1\cdot p^2 + \frac{1}{2}\cdot p(1-p) + \frac{1}{2}\cdot(1-p)p + 0\cdot(1-p)^2 = p$$

    A két stratégia között tehát nincs különbség. A (b)-hez hasonló stratégiák nagyobb csapatok (és $p > 1/2$) esetén segítenek.