Villamosmérnök A4

3. gyakorlat (2012. 09. 24.-25.)

Nevezetes diszkrét eloszlások

1. Nevezetes diszkrét eloszlások bemutatása

   (a) *Bernoulli eloszlás:* Olyan kísérletet hajtunk végre, aminek eredménye lehet "siker" vagy "kudarc", azaz a BERNOULLI(p) eloszlású valószínűségi változó két értéket vehet fel, 0-t és 1-et. Ekkor $\mathbb{P}(X = 1) = p$ a siker bekövetkezési valószínűsége és $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ a kudarcé.
   Példa: Dobókockával hatost dobok vagy sem. $\mathbb{P}(X = 1) = 1/6 = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$

   (b) *Diszkrét egyenletes eloszlás:* A valószínűségi változó véges sok értéket vehet fel és ezeket azonos valószínűséggel veszi fel.
   Példa: Kockadobás eseten a dobott számok értéke: $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) =\ldots=\mathbb{P}(X = 6) = 1/6$

   (c) *Binomiális eloszlás:* BIN(n, p) eloszlású az a valószínűségi változó, ami n darab független, egyenként p valószínűséggel sikerrel járó kísérlet közül a sikereket számolja.

   $$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad \text{ahol} \quad k = 0, 1, 2 \ldots n$$

   Példa: 20 kockadobásból a hatos dobások számának eloszlása: $\mathbb{P}(X = k) = \binom{20}{k}(1/6)^k(5/6)^{20-k}$.

   (d) *Geometriai eloszlás:* GEO(p) eloszlású az a valószínűségi változó, ami az első siker eléréséhez szükséges kísérleteket számolja, ahol a független kísérletekben a siker valószínűsége p.

   $$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad \text{ahol} \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

   Példa: Az első hatos dobásig eltelt dobások száma: $\mathbb{P}(X = k) = (5/6)^{k-1}(1/6)$.

   (e) *Negatív binomiális eloszlás:* NBIN(l, p) eloszlású az a valószínűségi változó ami azt számolja, hogy hány kísérlet következik be az l-dik sikerig, ahol a független kísérletekben a siker valószínűsége p.

   $$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{l-1} p^l (1 - p)^{k-l}, \quad \text{ahol} \quad k = l, l + 1, l + 2 \ldots$$

   A dobások számának eloszlása a harmadik hatos dobásig: $\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{2}(1/6)^3(5/6)^{k-3}$.

   (f) *Hipergeometriai eloszlás:* n golyó közül n_1 piros színű, $n - n_1$ pedig fekete színű. r-et kihúzunk, és az ezek között lévő piros golyók számát vizsgáljuk.

   $$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n-n_1}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

   Példa: Találatok száma az 5-ös LOTTÓ-n: $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$.

   (g) *Poisson eloszlás:* POI(λ) eloszlású a valószínűségi változó, ha sok, pici valószínűségű, független esemény közül bekövetkezett eseményeket számolja.

   $$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \text{ahol} \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

   Példa: Mazsolák száma egy szelet süteményben, a sajtóhibák száma az újságban, Magyarországon beövetkező földrengések száma... stb.

2. Milyen nevezetes eloszlással modellezhetjük a következő valószínűségi változókat: (a) hányadik autó veszi fel Tódort, amikor kiáll az országútra, mert autóstoppal akar utazni? (b) 10 autó közül hány vesz fel stopposokat? (c) 10 perc alatt hány autó áll meg stopposoknak?

3. Egy gyárban futószalag szállítja az alkatrészeket. A futószalag leáll, ha selejtes termék érkezik. A termékek 2%-a selejtes. Mi az eloszlása annak a valószínűsége változónak, ami azt számolja, hogy (a) hányszor állt le a szalag az n-edik termékig (őt is beleértve)? (b) hány terméket gyártott a gép az n-edik leállásig? (c) hány terméket szállított két leállás között? (d) hány leállás történt egymás után addig, amíg a legelső jó termék keletkezett?

4. Egy A4-es csoportban 30 hallgató van. A szeptember 24-ei órára 9-an nem készültek. Az oktató kijelölt 7 hallgatót, akiknek röpZH-t kellett írniuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan 2 készületlen hallgatónak kell röpZH-t írnia? Adjuk meg a készületlen, röpZH-t írók számának eloszlását!

5. A Schönherz Zoltán Kollégiumban egy évben 0,38 valószínűséggel üt ki tűz. (a) Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan 10 év telik el a következő tűzeset bekövetkezéséig? (b) Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan 30 év telik el a 4. tűzeset bekövetkezéséig?

6. Huba vett egy doboz gumicukrot, melynek 35%-a piros színű, a többi pedig lila. Véletlenszerűen kiválaszt 12 cukrot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy (a) kettőnél több piros cukor lesz a kiválasztottak között? (b) legalább négy, de legfeljebb hét lila cukor lesz a kiválasztottak között?

7. Valamely pénznyerő automata a tapasztalatok szerint az egyes játékosoktól függetlenül a játékok 5%-ában ad valamilyen pénznyereményt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 15. játéknál nyerünk először?

8. Egy pékségben szeletelt mazsolás kalácsokat készítenek. Minden negyedik szeletben nincs mazsola. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválaszott szelet kalácsban két mazsola van?

9. Annak a valószínűsége, hogy egy veszélyeztetett cseresznyéskert egy cseresznyéjében két kukac van, kétszer akkora, mint az, hogy nincs benne kukac. Mennyi annak a valószínűsége, hogy (a) 20 véletlenszerűen kiválasztott cseresznyében nincs kukac? (b) csak egy kukac van egy cseresznyében? (c) 20 cseresznyében összesen 20 kukacot találunk?

10. Augusztusi éjszakákon megfigyelések szerint átlagosan 12 percenként észlelhető csillaghullás. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 23 óra és éjfél között 4 hullócsillagot észlelünk?

11. Egy konferencián 30 villamosmérnök és 24 informatikus hallgató vesz részt. Az 54 résztvevőből 6-ot kiválasztanak, akik egy fórumon vesznek részt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább két informatikus lesz közöttük?

12. Egy rozsomák elindul a számegyenes origójából. Minden lépésnél $1/2$ valószínűséggel jobbra, $1/2$ valószínűséggel balra lép, az előző lépéseitől függetlenül. 20 lépés megtétele után (a) mennyi annak a valószínűsége, hogy a 0-ban van? (b) mennyi annak a valószínűsége, hogy az 1-ben van? (c) mennyi annak a valószínűsége, hogy a (-2)-ben van? (d) mennyi annak a valószínűsége, hogy a (-2)-ben van, ha az utolsó előtti lépés után a (-3)-ban volt?

13. Átlagosan hány mazsolának kell lennie egy sütiben, ha azt kívánja elérni a cukrász, hogy egy véletlenszerűen kiválaszott sütiben legalább $0,99$ valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

14. Egy erdőben 20 őz él, melyekből 5-öt befogtak, megjelöltek, majd visszaengedtek.Később ebből a 20 őzből 4-et újra befognak. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az újra befogott 4 őzből pontosan kettő van megjelölve?

15. A Kocogj Velünk! mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen.

16. 100 kulcsunk közül csak 1 nyitja az előttünk álló ajtót. A sötétben nem látjuk, hogy melyik kulcsot próbáltuk már ki, így a próbálgatások során többször is kezünkbe kerülhet ugyanaz a kulcs. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozással kinyitjuk az ajtót?

17. Blicc úr minden nap villamossal megy dolgozni, de nincs bérlete, sem jegye. A villamosra minden nap $0,2$ valószínűséggel száll fel ellenőr, és ilyenkor $0,8$ valószínűséggel elkapja Blicc urat. (Az ellenőr minden nap az addigiaktól függetlenül dönti el, hogy ellenőrzi-e aznap Blicc úr villamosát.) (a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" van, azaz az 5 munkanap egyikén sem kell büntetést fizetnie? (b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan kétszer kapják el egy hét munkanapjai alatt? (c) Feltéve, hogy Blicc úrnak "szerencsés" hete volt, mennyi annak a valószínűsége, hogy mind az ötször volt ellenőr a villamoson? (d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy csütörtökön büntetik meg Blicc urat először?

18. Feltesszük, hogy egy országban az öngyilkosságok gyakorisága havonta és 100.000 lakosonként átlagosan 1 öngyilkosság. (a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ország egy 400.000-es városában 8 vagy több öngyilkosság történik egy adott hónapban? (b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz legalább 2 olyan hónap az évben, amikor a városban 8 vagy több öngyilkosság történik? (c) Ha a folyó hónapot számoljuk az első hónapnak, mennyi annak a valószínűsége, hogy az első olyan hónap, amikor 8 vagy több öngyilkosság történik a városban az i-edik hónap lesz, $i \leq 1$?

19. Egy városban átlagosan 15 baleset következik be egy hét alatt. Ezen balesetek 20%-ában sajnos súlyos sérülés is történik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy (a) egy hét alatt 13 baleset következik be? (b) egy hét alatt 4 súlyos sérülésekkel járó baleset következik be? (c) egy hét alatt 13 baleset következik be, amiből 4 súlyos sérülésekkel is jár

20. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme $3/4$ valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, $1/2$ eséllyel az igazságosat, $1/2$ eséllyel a cinkeltet. A kiválaszott érmét feldobom 30-szor és azt tapasztalom, hogy 25-ször mutatott fejet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a cinkelt érmét vettem elő?