Villamosmérnök A4

3. gyakorlat (2012. 09. 24.-25.)

Nevezetes diszkrét eloszlások

1. Nevezetes diszkrét eloszlások bemutatása

   (a) *Bernoulli eloszlás:* Olyan kísérletet hajtunk végre, aminek eredménye lehet "siker" vagy "kudarc", azaz a BERNOULLI(p) eloszlású valószínűségi változó két értéket vehet fel, 0-t és 1-et. Ekkor $\mathbb{P}(X = 1) = p$ a siker bekövetkezési valószínűsége és $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ a kudarcé.
   Példa: Dobókockával hatost dobok vagy sem. $\mathbb{P}(X = 1) = 1/6 = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$

   (b) *Diszkrét egyenletes eloszlás:* A valószínűségi változó véges sok értéket vehet fel és ezeket azonos valószínűséggel veszi fel.
   Példa: Kockadobás eseten a dobott számok értéke: $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \ldots = \mathbb{P}(X = 6) = 1/6$

   (c) *Binomiális eloszlás:* BIN(n, p) eloszlású az a valószínűségi változó, ami n darab független, egyenként p valószínűséggel sikerrel járó kísérlet közül a sikereket számolja.

   $$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{ahol} \quad k = 0, 1, 2 \ldots n$$

   Példa: 20 kockadobásból a hatos dobások számának eloszlása: $\mathbb{P}(X = k) = \binom{20}{k}(1/6)^k(5/6)^{20-k}$.

   (d) *Geometriai eloszlás:* GEO(p) eloszlású az a valószínűségi változó, ami az első siker eléréséhez szükséges kísérleteket számolja, ahol a független kísérletekben a siker valószínűsége p.

   $$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p, \quad \text{ahol} \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

   Példa: Az első hatos dobásig eltelt dobások száma: $\mathbb{P}(X = k) = (5/6)^{k-1}(1/6)$.

   (e) *Negatív binomiális eloszlás:* NBIN(l, p) eloszlású az a valószínűségi változó ami azt számolja, hogy hány kísérlet következik be az l-dik sikerig, ahol a független kísérletekben a siker valószínűsége p.

   $$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{l-1} p^l (1-p)^{k-l}, \quad \text{ahol} \quad k = l, l+1, l+2 \ldots$$

   A dobások számának eloszlása a harmadik hatos dobásig: $\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{2}(1/6)^3(5/6)^{k-3}$.

   (f) *Hipergeometriai eloszlás:* n golyó közül n_1 piros színű, $n - n_1$ pedig fekete színű. r-et kihúzunk, és az ezek között lévő piros golyók számát vizsgáljuk.

   $$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n-n_1}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

   Példa: Találatok száma az 5-ös LOTTÓ-n: $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$.

   (g) *Poisson eloszlás:* POI(λ) eloszlású a valószínűségi változó, ha sok, pici valószínűségű, független esemény közül bekövetkezett eseményeket számolja.

   $$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad \text{ahol} \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

   Példa: Mazsolák száma egy szelet süteményben, a sajtóhibák száma az újságban, Magyarországon beövetkező földrengések száma... stb.

2. Milyen nevezetes eloszlással modellezhetjük a következő valószínűségi változókat:

   (a) hányadik autó veszi fel Tódort, amikor kiáll az országútra, mert autóstoppal akar utazni?
   Megoldás: geometriai eloszlással

   (b) 10 autó közül hány vesz fel stopposokat?
   Megoldás: binomiális eloszlással

   (c) 10 perc alatt hány autó áll meg stopposoknak?
   Megoldás: Poisson eloszlással

3. Egy gyárban futószalag szállítja az alkatrészeket. A futószalag leáll, ha selejtes termék érkezik. A termékek 2%-a selejtes. Mi az eloszlása annak a valószínűsége változónak, ami azt számolja, hogy

   (a) hányszor állt le a szalag az n-edik termékig (őt is beleértve)?

   (b) hány terméket gyártott a gép az n-edik leállásig?

   (c) hány terméket szállított két leállás között?

   (d) hány leállás történt egymás után addig, amíg a legelső jó termék keletkezett?

Megoldás:

(a) Az eloszlás binomiális ($BIN(n,p)$), a leállás ("siker") valószínűsége $p = 0.02$. Tehát $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}0.02^k 0.98^{n-k}$.

(b) Az eloszlás negatív binomiális ($NBIN(n,p)$), a leállás ("siker") valószínűsége $p = 0.02$. Tehát $\mathbb{P}(X = k) = k - 1 choose n - 1 0.02^n 0.98^{k-n}$.

(c) Az eloszlás geometriai ($GEO(p)$), a leállás ("siker") valószínűsége $p = 0.02$. Tehát $\mathbb{P}(X = k) = 0.98^{k-1}0.02$.

(d) Az eloszlás most is geometriai ($GEO(p)$), csak a "siker" ebben az esetben a jó termék gyártása, ennek valószínűsége $p = 0.98$. Tehát $\mathbb{P}(X = k) = 0.02^{k-1}0.98$.

4. Egy A4-es csoportban 30 hallgató van. A szeptember 24-ei órára 9-an nem készültek. Az oktató kijelölt 7 hallgatót, akiknek röpZH-t kellett írniuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan 2 készületlen hallgatónak kell röpZH-t írnia? Adjuk meg a készületlenül röpZH-t író hallgatók számának eloszlását!

Megoldás: Ha X-szel jelöljük a készületlenül röpZH-t írók számát, akkor X hipergeometriai eloszlást követ. Tehát

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{9}{2}\binom{21}{5}}{\binom{30}{7}}.$$

Tetszőleges k esetén az eloszlás a következő:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{9}{k}\binom{21}{7-k}}{\binom{30}{7}}.$$

5. A Schönherz Zoltán Kollégiumban egy évben 0.38 valószínűséggel üt ki tűz.

(a) Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan 10 év telik el a következő tűzeset bekövetkezéséig?

(b) Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan 30 év telik el a 4. tűzeset bekövetkezéséig?

Megoldás:

(a) Jelöljük X-szel a következő tűzeset bekövetkezéséig eltelt évek számát. Ekkor $X \sim GEO(p = 0.38)$ eloszlást követ. Azaz

$$\mathbb{P}(\text{10 év telik el a következő tűzesetig}) = \mathbb{P}(X = 10) = 0.62^9 0.38.$$

(b) Jelöljük Y-nel a 4. tűzeset bekövetkezéséig eltelt évek számát. Ekkor $X \sim NBIN(4, p = 0.38)$ eloszlást követ. Azaz

$$\mathbb{P}(\text{30 év telik el a 4. tűzesetig}) = \mathbb{P}(X = 30) = \binom{29}{3}0.62^{26}0.38^4.$$

6. Huba vett egy doboz gumicukrot, melynek 35%-a piros színű, a többi pedig lila. Véletlenszerűen kiválaszt 12 cukrot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

(a) kettőnél több piros cukor lesz a kiválasztottak között?

(b) legalább négy, de legfeljebb hét lila cukor lesz a kiválasztottak között?

Megoldás:

(a) A kiválasztott piros cukrok X száma binomiális eloszlást követ $n = 12$ és $p = 0.35$ paraméterekkel. Ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2}\binom{12}{k}0.35^k 0.65^{12-k}.$$

(b) A kiválasztott lila cukrok Y száma binomiális eloszlást követ $n = 12$ és $p = 0.65$ paraméterekkel. Ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(4 \leq X \leq 7) = 1 - \sum_{k=4}^{7}\binom{12}{k}0.65^k 0.35^{12-k}.$$

7. Valamely pénznyerő automata a tapasztalatok szerint az egyes játékosoktól függetlenül a játékok 5%-ában ad valamilyen pénznyereményt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 15. játéknál nyerünk először?

Megoldás: Legyen X az első nyerésig bekövetkező játékok száma. Ekkor $X \sim GEO(p = 0.05)$ eloszlást követ. Így a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(X = 15) = 0.95^{14} \cdot 0.05.$$

8. Egy pékségben szeletelt mazsolás kalácsokat készítenek. Minden negyedik szeletben nincs mazsola. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválaszott szelet kalácsban két mazsola van?

   Megoldás: A kalácsban lévő mazsolák X száma Poisson eloszlást követ valamilyen ismeretlen λ paraméterrel. A feladat szövege alapján $\mathbb{P}(X=0)=1/4$. Felírva az eloszlást kapjuk, hogy $\mathrm{e}^{-\lambda}=1/4$, azaz $\lambda=-\ln(1/4)$. Ezek után kapjuk a keresett valószínűséget:

$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(-\ln(1/4))^2}{2!}.$$

9. Annak a valószínűsége, hogy egy veszélyeztetett cseresznyéskert egy cseresznyéjében két kukac van, kétszer akkora, mint az, hogy nincs benne kukac. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

   (a) 20 véletlenszerűen kiválasztott cseresznyében nincs kukac?

   (b) csak egy kukac van egy cseresznyében?

   (c) 20 cseresznyében összesen 20 kukacot találunk?

   Megoldás: Az egy cseresznyében lévő kukacok X száma Poisson eloszlást követ valamilyen ismeretlen λ paraméterrel. A feladat szövege alapján $2\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=2)$. Felírva az eloszlásokat kapjuk, hogy $\lambda=2$. Ezalapján tehát ha egy cseresznyében átlagosan 2 kukac van, akkor 20 cseresznyében átlagosan 40 kukac. Azaz a 20 cseresznyében lévő kukacok Y száma $POI(\lambda=40)$ eloszlást követ.

   (a) $\mathbb{P}(Y=0)=\mathrm{e}^{-40}$

   (b) $\mathbb{P}(X=1)=\mathrm{e}^{-2}\frac{2}{1!}$

   (c) $\mathbb{P}(Y=20)=\mathrm{e}^{-40}\frac{40^{20}}{20!}$

10. Augusztusi éjszakákon megfigyelések szerint átlagosan 12 percenként észlelhető csillaghullás. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 23 óra és éjfél között 4 hullócsillagot észlelünk?

    Megoldás: Az augusztusi éjszakákon bekövetkező csillaghullások száma Poisson eloszlású valószínűségi változónak tekinthető. Ha átlagosan 12 percenként észlelhető csillaghullás, akkor a vizsgált 60 perces időtartamban átlagosan 5 csillaghullás fog bekövetkezni. Azaz ha X-szel jelöljük a 23 óra és éjfél között bekövetkező csillaghullások számát, akkor $X\sim POI(\lambda=5)$ eloszlást követ. Ekkor pedig a kérdés megválaszolásához a $\mathbb{P}(X=4)$ valószínűség értéket kell kiszámolnunk.

$$\mathbb{P}(X=4)=\mathrm{e}^{-5}\frac{5^4}{4!}$$

11. Egy konferencián 30 villamosmérnök és 24 informatikus hallgató vesz részt. Az 54 résztvevőből 6-ot kiválasztanak, akik egy fórumon vesznek részt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább két informatikus lesz közöttük?

    Megoldás: Jelölje X a kiválasztott informatikus hallgatók számát. Ekkor X hipergeometriai eloszlást követ. Legalább két kiválasztott informatikus azt jelenti, hogy $2,3,4,5$ illetve 6 informatikus is lehet közöttük. Ez túl sok számolást jelent, így könnyebb kiszámolnunk a komplementer esemény valószínűségét, azaz azt, hogy legfeljebb 1 informatikus van a kiválasztottak között.

$$\mathbb{P}(X\geq 2)=1-\mathbb{P}(X\leq 1)=1-\frac{\binom{30}{6}\binom{24}{0}}{\binom{54}{6}}-\frac{\binom{30}{5}\binom{24}{1}}{\binom{54}{6}}$$

12. Egy rozsomák elindul a számegyenes origójából. Minden lépésnél 1/2 valószínűséggel jobbra, 1/2 valószínűséggel balra lép, az előző lépéseitől függetlenül. 20 lépés megtétele után

    (a) mennyi annak a valószínűsége, hogy a 0-ban van?

    (b) mennyi annak a valószínűsége, hogy az 1-ben van?

    (c) mennyi annak a valószínűsége, hogy a (-2)-ben van?

    (d) mennyi annak a valószínűsége, hogy a (-2)-ben van, ha az utolsó előtti lépés után a (-3)-ban volt?

    Megoldás: Jelölje X a rozsomák által megtett balra lépések számát. Ekkor $X\sim BIN(20,1/2)$ eloszlást követ.

    (a) Akkor és csak akkor lesz a 0-ban, ha a 20 lépése közül pontosan 10 volt balra lépés, és 10 jobbra lépés. Azaz

$$\mathbb{P}(\text{0-ban van})=\mathbb{P}(X=10)=\binom{20}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\simeq 0.176.$$

    (b) Páros számú lépés után csak páros pozícióban lehet a rozsomák, így $\mathbb{P}(\text{1-ben van})=0$.

    (c) Akkor lesz a rozsomák a (-2)-ben, ha pontosan 11-szer lépett balra, és 9-szer jobbra. Azaz

$$\mathbb{P}((-2)\text{-ban van})=\mathbb{P}(X=11)=\binom{20}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{9}\simeq 0.16.$$

(d) Ha az utolsó előtti lépés után a (-3)-ban volt, akkor $\frac{1}{2}$ eséllyel lép egyet jobbra, a (-2)-be.

13. Átlagosan hány mazsolának kell lennie egy sütiben, ha azt kívánja elérni a cukrász, hogy egy véletlenszerűen kiválaszott sütiben legalább $0,99$ valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

Megoldás: Az egy szeletben található mazsolák száma ismeretlen λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változónak tekinthető. Így a kérdés úgy szól, hogy mekkora legyen λ ahhoz, hogy $\mathbb{P}(X \geq 1) \geq 0.99$ igaz legyen. A valószínűség kiszámításához át kell térnünk a komplementer eseményre, azaz $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$. Ezek után felírva a fenti egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$1 - \mathbb{P}(X = 0) \geq 0.99$$

$$1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} \geq 0.99$$

$$0.01 \geq \mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$\ln 0.01 \geq -\lambda$$

$$\lambda \geq -\ln 0.01 = 4.6$$

Azaz átlagosan 4.6 mazsolának kell lennie egy sütiben.

14. Egy erdőben 20 őz él, melyekből 5-öt befogtak, megjelöltek, majd visszaengedtek.Később ebből a 20 őzből 4-et újra befognak. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az újra befogott 4 őzből pontosan kettő van megjelölve?

Megoldás: Jelölje X az újra befogott és megjelölt őzek számát. Ekkor X hipergeometriai eloszlást követ. Ahhoz, hogy 2 megjelölt és 2 nem megjelölt őzet fogjunk, 2-t kell kiválasztanunk az 5 megjelölt őzből, és 2-t a 15 nem megjelölt őzből. Ezalapján

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{15}{2}}{\binom{20}{4}} \simeq 0.22.$$

A kérdést máshogy is megtámadhatjuk, ha az idő visszafordításával azt kérdezzük, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy az általunk fogott 4-ből 2, és az általunk nem megfogott 16-ból 3 őz van megjelölve. Ekkor a válasz $\binom{4}{2}\binom{16}{3}/\binom{20}{5}$. A binomiális együtthatók kifejtése után láthatjuk, hogy a két válasz megegyezik.

15. A Kocogj Velünk! mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen.

Megoldás: Az egy versenyzőben talált kullancsok X száma Poisson eloszlású, valamilyen ismeretlen λ paraméterrel. Ha n versenyző indult, akkor a megadott adatok alapján közelítőleg $\mathbb{P}(X = 1) \simeq \frac{300}{n}$, míg $\mathbb{P}(X = 2) \simeq \frac{75}{n}$. A Poisson eloszlás segítségével tehát meg kell oldanunk az

$$\frac{\lambda^1}{1!}\mathrm{e}^{-\lambda} \simeq \frac{300}{n}$$

$$\frac{\lambda^2}{2!}\mathrm{e}^{-\lambda} \simeq \frac{75}{n}$$

egyenletrendszert. A második egyenletet elosztva az elsővel kapjuk, hogy $\lambda/2 \simeq 1/4$, azaz $\lambda \simeq 1/2$. Így az első egyenlet alapján kapjuk, hogy $n \simeq 300\mathrm{e}^{\lambda}/\lambda \simeq 989$.

16. 100 kulcsunk közül csak 1 nyitja az előttünk álló ajtót. A sötétben nem látjuk, hogy melyik kulcsot próbáltuk már ki, így a próbálgatások során többször is kezünkbe kerülhet ugyanaz a kulcs. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozással kinyitjuk az ajtót?

Megoldás: Feltesszük, hogy a kulcsok próbálgatását függetlenül és minden kulcsnak egyenlő esélyt adva végezzük. Ekkor minden próbálkozásnál $1/100$ valószínűséggel leszünk sikeresek. Ismét úgy számolhatjuk ki a keresett valószínűséget egyszerűbben, ha áttérünk a komplementer esemény valószínűségének kiszámítására. Az első 50 próbálkozás nem sikerül, ha 50-szer nem a megfeleő kulcs akad a kezünkbe. Ennek az esélye $\left(\frac{99}{100}\right)^{50}$. Tehát ha X jelöli a próválkozások számát, akkor

$$\mathbb{P}(X \leq 50) = 1 - \mathbb{P}(X > 50) = 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{50} \simeq 0.395.$$

Ha a kipróbált kulcsokat félretesszük, akkor legfeljebb 50 próbálkozásra kinyitjuk az ajtót, ha a kulcsok véletlen kipróbálási sorrendjében a megfelelő kulcs benne volt az első 50-ben. Mivel a véletlen sorrendben ez a kulcs bárhol egyenlő eséllyel lehet, a valószínűség ekkor $50/100 = 0.5$ lenne.

17. Blicc úr minden nap villamossal megy dolgozni, de nincs bérlete, sem jegye. A villamosra minden nap $0,2$ valószínűséggel száll fel ellenőr, és ilyenkor $0,8$ valószínűséggel elkapja Blicc urat. (Az ellenőr minden nap az addigiaktól függetlenül dönti el, hogy ellenőrzi-e aznap Blicc úr villamosát.)

(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" van, azaz az 5 munkanap egyikén sem kell büntetést fizetnie?

(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan kétszer kapják el egy hét munkanapjai alatt?

(c) Feltéve, hogy Blicc úrnak "szerencsés" hete volt, mennyi annak a valószínűsége, hogy mind az ötször volt ellenőr a villamoson?

(d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy csütörtökön büntetik meg Blicc urat először?

Megoldás: Blicc urat minden nap egymástól függetlenül $p = 0.2 \cdot 0.95 = 0.19$ valószínűséggel büntetik meg. Ha X-szel jelöljük az öt nap alatti büntetések számát, akkor $X \sim BIN(5, p)$ eloszlást követ. Ezért

(a) $\mathbb{P}(\text{nem kell büntetést fizetnie}) = \mathbb{P}(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0.19^0 \cdot 0.81^5 \simeq 0.349$

(b) $\mathbb{P}(\text{kétszer kapják el}) = \mathbb{P}(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0.19^2 \cdot 0.81^3 \simeq 0.192$

(c) Legyen E az az esemény, hogy mind az ötször volt ellenőr a villamoson, F az az esemény, hogy Blicc úrnak szerencsés hete volt. Ekkor $\mathbb{P}(RF) = \mathbb{P}(F|E) \cdot \mathbb{P}(E)$ annak a valószínűsége, hogy mint az ötször volt ellenőr, de Blicc úr mind az ötször megúszta a büntetést, $\mathbb{P}(F)$-et pedig az (a) részben kiszámoltuk. Így

$$\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(F|E) \cdot \mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{0.05^5 \cdot 0.2^5}{0.349} \simeq 2.87 \cdot 10^{-10}.$$

(d) A hét első három napján Blicc úr nem kapott büntetést, a negyedik napon kapott. Jelölje Y az első olyan napot, amikor Blicc urat megbüntették. Ekkor $X \sim GEO(p)$ eloszlást követ, tehát

$$\mathbb{P}(\text{csütörtökön büntetik először}) = \mathbb{P}(Y = 4) = 0.81^3 \cdot 0.19 \simeq 0.101.$$

18. Feltesszük, hogy egy országban az öngyilkosságok gyakorisága havonta és 100.000 lakosonként átlagosan 1 öngyilkosság.

(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ország egy 400.000-es városában 8 vagy több öngyilkosság történik egy adott hónapban?

(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz legalább 2 olyan hónap az évben, amikor a városban 8 vagy több öngyilkosság történik?

(c) Ha a folyó hónapot számoljuk az első hónapnak, mennyi annak a valószínűsége, hogy az első olyan hónap, amikor 8 vagy több öngyilkosság történik a városban az i-edik hónap lesz, $i \geq 1$?

Megoldás: Feltesszük, hogy a lakosok egymástól függetlenül, az év bármely időszakában egyforma valószínűséggel lesznek öngyilkosok.

(a) A 400000-res városban várhatóan 4 öngyilkosság történik havonta, ezért az öngyilkosságok X száma Poisson eloszlású $\lambda = 4$ paraméterrel. Ekkor

$$p = \mathbb{P}(X \geq 8) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 7) = 1 - \sum_{j=0}^{7} \mathbb{P}(X = j) = 1 - \sum_{j=0}^{7} \frac{4^j}{j!} \cdot \mathrm{e}^{-4} \simeq 0.0511$$

(b) Az ilyen hónapok Y száma az évben $BIN(12, p)$ eloszlást követ (itt p értéke az (a) részben már kiszámoltuk). Tehát

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) = \\ &= 1 - \binom{12}{0} \cdot 0.0511^0 \cdot (1 - 0.0511)^{12} - \binom{12}{1} \cdot 0.0511^1 \cdot (1 - 0.0511)^{11} \simeq 0.123 \end{aligned}$$

(c) Az első ilyen hónap sorszáma egy Z geometriai eloszlású valószínűségi változó a fenti p paraméterrel. Tehát

$$\mathbb{P}(Z = i) = (1 - 0.0511)^{i-1} \cdot 0.0511.$$

19. Egy városban átlagosan 15 baleset következik be egy hét alatt. Ezen balesetek 20%-ában sajnos súlyos sérülés is történik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

(a) egy hét alatt 13 baleset következik be?

(b) egy hét alatt 4 súlyos sérülésekkel járó baleset következik be?

(c) egy hét alatt 13 baleset következik be, amiből 4 súlyos sérülésekkel is jár

Megoldás: Jelölje X az egy hét alatt bekövetkezett balesetek számát, illetve Y az egy hét alatt bekövetkezett súlyos balesetek számát. Ekkor mindkét valószínűségi változónk Poisson eloszlást követ: $X \sim POI(15)$, $Y \sim POI(3)$.

(a) $\mathbb{P}(X = 13) = \mathrm{e}^{-15} \frac{15^{13}}{13!}$

(b) $\mathbb{P}(Y = 4) = \mathrm{e}^{-3} \frac{3^4}{4!}$

(c) $\mathbb{P}(X=13, Y=4) = \mathbb{P}(Y=4|X=13)\mathbb{P}(X=13) = \mathrm{e}^{-2.6}\frac{(2.6)^4}{4!}\cdot \mathrm{e}^{-15}\frac{15^{13}}{13!}$
Itt a feltételes valószínűségdefiníciója mellett felhasználtuk azt, hogy az $Y|X=13$ valószínűségi változó is Poisson eloszlást követ $\lambda = 2.6$ paraméterrel.

20. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme $3/4$ valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, $1/2$ eséllyel az igazságosat, $1/2$ eséllyel a cinkeltet. A kiválaszott érmét feldobom 30-szor és azt tapasztalom, hogy 25-ször mutatott fejet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a cinkelt érmét vettem elő?

Megoldás: Legyen X a dobott fejek száma, C pedig az az esemény, hogy a cinkelt érmével dobtam. Ekkor a Bayes-tételt használva kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(C|X=25) = \frac{\mathbb{P}(X=25|C)\cdot\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(X=25|C)\cdot\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(X=25|\bar{C})\cdot\mathbb{P}(\bar{C})} =$$

$$= \frac{\binom{30}{25}\left(\frac{3}{4}\right)^{25}\left(\frac{1}{4}\right)^{5}\frac{1}{2}}{\binom{30}{25}\left(\frac{3}{4}\right)^{25}\left(\frac{1}{4}\right)^{5}\frac{1}{2}+\binom{30}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^{25}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\frac{1}{2}} = \frac{3^{25}}{3^{25}+2^{30}} \simeq 0.9987$$

A megoldásban felhasználtuk, hogy az $(X=25|C)$ valószínűségi változó $BIN(30, 3/4)$, míg a $(X=25|\bar{C})$ valószínűségi változó $BIN(30, 1/2)$ eloszlást követ.