

# Villamosmérnök A4

5. gyakorlat (2012. 10. 08.-09.)

## Folytonos valószínűségi változók. Eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény fogalma. Egyenletes eloszlás.

- Van egy mérlegünk, ami két tizedesjegy pontossággal írja ki kilogrammban, kerekítve, a lemérendő tárgy tömegét. Feltesszük, hogy a készülékünk pontosan mér, és utána kerekít. Ha a mérleg által kiírt értéket fogadjuk el, mi a valószínűsége, hogy a tényleges értéktől való tévedésünk
  - legfeljebb 3 gramm?
  - legalább 1 gramm?
  - több, mint 1 gramm, de kevesebb, mint 3 gramm?
- Jancsi és Juliska randevút beszéltek meg este 6 órára. Mindketten elég pontatlanok, de legfeljebb 30 percet késnek, a találka helyszínére való érkezési idejük tehát véletlen, egyenletes eloszlású a 6 óra és fél 7 közti időintervallumban. Amikor valamelyikük megérkezik, ha nem találja ott a másikat, akkor 10 percet vár, és ha addigra sem érkezett meg a másik, akkor csalódottan hazamegy. Mi a valószínűsége, hogy létrejön a találkozó?
- Jancsi és Juliska randevút beszéltek meg este 6 órára. Mindketten elég pontatlanok, de Jancsi legfeljebb 10 percet, Juliska legfeljebb 30 percet késik. Jancsi, amennyiben érkezésekor nem találja ott Juliskát, hajlandó még 10 percet várni rá, a lány azonban csak 5 percig vár, ha a fiút nem találja ott. Mi a valószínűsége, hogy létrejön a találkozó?
- Egy  $R$  sugarú körre rádobunk egy  $r < R$  sugarú kört úgy, hogy középpontja a nagy körön egyenletes eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy a kis kör teljes egészében a nagy körre esik?
- Mi az  $(a, b)$  intervallumon egyenletes eloszlású  $X$  valószínűségi változó sűrűségfüggvénye?
- Egy kalapácsvető bekötött szemmel hajítja el a kalapácsot, pár forgás után, véletlenszerűen. A sportolót  $0^\circ$  és  $300^\circ$  szög között védőháló veszi körül, amin azonban tátong egy 2 foknyi rés  $100^\circ$  és  $102^\circ$  között.
  - Mi a valószínűsége, hogy a háló megfogja a kalapácsot?
  - Mi a valószínűsége, hogy a kalapács a 2 fokos résen keresztül kirepül a védőhálón kívülre?
  - Feltéve, hogy a kalapács kiröpült a védőhálón kívülre, mi a valószínűsége, hogy a 2 fokos résen repült ki?
- A reggeli buszom egyenletes eloszlású időpontban érkezik 7:30 és 7:40 között.
  - Hányra menjek oda a megállóba, ha legalább 80%-os esélyt szeretnék arra, hogy elérjem?
  - Már késésben vagyok, mikor elindulok otthonról, és látom, hogy csak 7:37-re fogok kiérni a megállóba. Gyorsan kötök egy fogadást a lakótársammal, 100 Ft-ot teszek arra, hogy lekéssem a buszt, de azért mindketten tudjuk, hogy rohanni fogok és odaérek 7:37-re. Mennyit tegyen ellenemben a lakótársam, hogy igazságos legyen a fogadás?
- Generálunk két véletlen egyenletes eloszlású számot egymástól függetlenül a  $[0, 1]$  intervallumon.
  - Mi a kettő maximumának sűrűségfüggvénye?
  - Mi a valószínűsége, hogy a nagyobbik szám nagyobb, mint 0,75?
- Vegyünk egy félkört, aminek a területére egyenletes eloszlással dobjunk le egy pontot, majd ezt vetítsük le merőlegesen az átmérőre. Az átmérőn ilyen módon kapott pont milyen eloszlású?
- Legyen  $X$  egyenletes eloszlású  $[0, 1]$ -en.
  - Mi  $Y = \sqrt{X}$  sűrűségfüggvénye?
  - Mi  $Z = X^2$  sűrűségfüggvénye?
- Lehetnek-e az alábbi függvények abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók eloszlásfüggvényei? Ha igen, számoljuk ki a sűrűségfüggvényt és a mediánt, valamint a  $P(0 < X < 1)$  értéket, ahol  $X$  olyan valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye  $F(x)$ .

$$(a) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ \cos x, & \text{ha } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{ha } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$(b) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ \sin x, & \text{ha } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{ha } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$(c) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ x^2, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

12. Lehetnek-e az alábbi függvények abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók sűrűségfüggvényei? Ha igen, számoljuk ki az eloszlásfüggvényt és a mediánt.

$$(a) f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{ha } 1 < x \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

13. Határozzuk meg úgy az  $A$  paraméter értékét, hogy az alábbi  $f(x)$  függvény sűrűségfüggvény lehessen, és számoljuk ki a  $P(X < 2)$  valószínűséget.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{x^3}, & \text{ha } 1 \leq x \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

14. Az  $(1, 3)$  intervallumon egyenletes eloszlásból sorsolunk tízezerszer, egymástól függetlenül. Azt tapasztaljuk, hogy ezek közül 9985 érték kisebb lett, mint  $y$ , a többi pedig nagyobb. Mi a legjobb tippünk ez alapján  $y$ -ra?
15. A zsebemben van egy ropi. Egyenletesen véletlenül választott pontban kettétöröm, majd kiválasztom az egyik darab ropit,  $1/2$ - $1/2$  valószínűséggel a két darab közül. Mi a valószínűsége annak, hogy annak a ropidarabnak a hossza, amit most a kezemben tartok, kisebb mint  $0,25$ ?
16. A zsebemben van egy ropi. Egyenletesen véletlenül választott pontban kettétöröm, majd kiválasztom az egyik darab ropit, a darabok hosszának megfelelő arányú valószínűségekkel. Mi a valószínűsége annak, hogy annak a ropidarabnak a hossza, amit most a kezemben tartok, kisebb mint  $0,25$ ?