Villamosmérnök A4

6. gyakorlat (2012. 10. 15.-16.)

Exponenciális és Gamma eloszlás.

1. Tegyük fel, hogy egy villanykörte élettartama (évben) 1/2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

   (a) Mennyi a várható élettartama?

   (b) Mi a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 2 évig ég?

   (c) Mi a valószínűsége, hogy több, mint 1 évig nem ég ki?

   (d) Mi a valószínűsége, hogy mostantól kezdve egy napig ég, de utána a következő nap folyamán kiég?

   (e) Feltéve, hogy 1 évig nem ég ki, mi a valószínűsége, hogy utána még legalább negyed évig működni fog?

   Megoldás: Legyen az élettartam X.

   (a) $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda = 2$ év

   (b) $P(X < 2) = F(2) = 1 - e^{-0,5 \cdot 2} = 1 - e^{-1} = 0,6321$

   (c) $P(X > 1) = 1 - F(1) = e^{-0,5 \cdot 1} = e^{-1/2} = 0,6065$

   (d) $P(\frac{1}{365} < X < \frac{2}{365}) = F(\frac{2}{365}) - F(\frac{1}{365}) = e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{365}} - e^{-\frac{1}{2}\frac{2}{365}} = 0,1367\%$

   (e) $P(X > 1,25 \big| X > 1) = \frac{P(X>1,25)}{P(X>1)} = \frac{e^{-0,5 \cdot 1,25}}{e^{-0,5 \cdot 1}} = e^{-0,5 \cdot 0,25} = 88,25\%$, másik megoldás: örökifjú tulajdonság miatt $P(X > 1,25 \big| X > 1) = P(X > 0,25) = e^{-0,5 \cdot 0,25} = 88,25\%$.

2. Felhívom a barátomat a mobilján 10 óra 10 perckor, de az foglaltat jelez. Tudom, hogy barátom beszélgetéseinek hossza (percben) exponenciális eloszlást követ, és a várható értéke 3 perc.

   (a) Mi a valószínűsége, hogy a következő 5 percben (10:10 - 10:15 között) végig foglalt lesz?

   (b) Mi a valószínűsége, hogy a következő 5 percben (10:10 - 10:15 között) végig foglalt lesz, feltéve hogy tudom, hogy már 10:00 óta foglalt?

   (c) Legkorábban hánykor hívjam fel újra, ha azt szeretném, hogy már legalább 1/2 esélyem legyen arra, hogy nem lesz foglalt (újabb hívás beérkezését nem számolva)?

   Megoldás: Jelölje X azt az időt (percben), ami 10:10 után eltelik, mire barátom leteszi a telefont. A várható érték 3 perc ($\mathbb{E}(X) = 3$), ami azt jelenti, hogy a paraméter $\lambda = 1/\mathbb{E}(X) = 1/3$.

   (a) $P(\text{10:15-kor még foglalt}) = P(X > 5) = 1 - F(5) = e^{-\frac{1}{3}5} = 18,89\%$

   (b) $P(\text{10:15-kor még foglalt}|\text{10:00 és 10:10 között foglalt volt}) = P(X > 15|x > 10) = \frac{P(X>15)}{P(X>10)} = \frac{e^{-\frac{1}{3}15}}{e^{-\frac{1}{3}10}} = e^{-\frac{1}{3}5} = 18,89\%$

   (c) $P(X < t) = 1 - e^{-\frac{1}{3}t} \geq 1/2$, azaz $t \geq 3 \ln 2 = 2,079$, tehát ha kb 2 perc 5 másodperc után hívom, akkor már 1/2-nél nagyobb eséllyel elérem.

3. 1000 darab egyforma típusú villanykörte kezd egyszerre világítani. Közülük egy óra múlva kiég 200 darab, (a kezdettől számítva) két óra múlva már csak 751 darab körte ég, három óra múlva pedig 452 darab világít. Modellezhetjük-e ezek alapján a mérési adatok alapján exponenciális eloszlással az adott típusú villanykörték élettartamát?

   Megoldás: Ha feltesszük, hogy exponenciális eloszlást követ az élettartam, akkor az ismeretlen λ paraméterre a három adatból háromféle becslést kapunk:
   $P(X > 1) = 0,8$, ebből $\lambda = -\ln 0,8 = 0,223$ adódik,
   $P(X > 2) = 0,751$, ebből $\lambda = -\frac{1}{2} \ln 0,751 = 0,143$ adódik, valamint
   $P(X > 3) = 0,452$, ebből $\lambda = -\frac{1}{2} \ln 0,452 = 0,265$ adódik. Ez a három érték a paraméterre túlságosan ingadozó, tehát a mért adatok nem sugallják, hogy a körték élettartama exponenciális eloszlású.

4. Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ.

   (a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?

   (b) Hány óra garanciát vállaljunk, ha garanciális időn belül átlagosan csak 5% garanciaigényt akarnak kielégíteni?

   Megoldás: Legyen X a berendezés elromlásának véletlen ideje. A feladat szövege szerint $P(X < 1000) = 1 - e^{-1000\lambda} = 0,02$, tehát az exponenciális eloszlás paramétere $\lambda = -\frac{1}{1000} \ln 0,98 = 0,000020203$, tehát várható értéke $1/\lambda = 49498,32$ év.

   (a) $P(X > \frac{1}{\lambda}) = e^{-\lambda \frac{1}{\lambda}} = e^{-1} = 0,3679$

   (b) Legyen t a keresett garanciaidő, ekkor a feladat szövege szerint $P(X > t) = 0,05$, azaz $e^{-\lambda t} = 0,95$, amiből $t = -\frac{1}{\lambda} \ln 0,95 = 1000 \frac{\ln 0,95}{\ln 0,98} = 2538,93$ óra.

5. Egy autószerelő műhelyben egy autó javítási ideje átagosan 2 óráig tart. Ha a javítási idő (órákban mérve) exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor:

   (a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott autó javítása 3 óránál tovább tart?

   (b) Mi a feltételes valószínűsége, hogy a javítás összesen 10 óránál is tovább tart, feltéve, hogy már 7 órája zajlik?

   Megoldás: Az eloszlás paramétere $\lambda = 1/\mathbb{E}(X) = 1/2$.

   (a) $P(X > 3) = e^{-1/23} = 22,31\%$.

   (b) Örökifjú tulajdonság miatt $P(X > 10|X > 7) = P(X > 3) = 22,31\%$.

6. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél 2/3 annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 1000 óra elteltével pontosan 150 égő világít?

   Megoldás: $P(X > 2000) = 2/3$, tehát $P(X > 1000) = e^{-1000\lambda} = \sqrt{e^{-2000\lambda}} = \sqrt{2/3} = 0,8165$. Az 1000 óra múlva még égő villanykörték száma binomiális eloszlát követ $n = 200$ és $p = 0,8165$ paraméterekkel. Ezért annak a valószínűsége, hogy pontosan 150 db világít, $\binom{200}{150}0,8165^{150}0,1835^{50}$.

7. Egy bizonyos fajta TV készülék első meghibásodása exponenciális eloszlást követ 4 év várható értékkel. Határozza meg annak valószínűségét, hogy 100 véletlenül kiválasztott készülék közül 42 romlik el három éven belül.

   Megoldás: $\lambda = 1/\mathbb{E}(X) = 1/4$, tehát $P(X < 3) = 1 - exp{-3/4} = 0,5276$. A 3 év múlva már elromlott TV-k száma binomiális eloszlát követ $n = 100$ és $p = 0,5276$ paraméterekkel. Ezért annak a valószínűsége, hogy pontosan 42 db romlik el 3 éven belül, $\binom{100}{42}0,5276^{42}0,4724^{58}$.

8. Egy bizonyos fajta mosógép első meghibásodása exponenciális eloszlást követ. A gépek meghibásodása 70% eséllyel történik öt éven belül. Határozza meg annak valószínűségét, hogy az általam vásárolt mosógép első meghibásodása három éven belül történik!

   Megoldás: $P(X < 5) = 0,7$, tehát $exp{-5\lambda} = 0,3$, azaz $\lambda = \frac{1}{5}\ln 0,3$. Annak valószínűsége, hogy a mosógépem 3 éven belül elromlik, $P(X < 3) = 1 - e^{-3\lambda} = 1 - 0,3^{3/5} = 0,5144$.

9. A menzai poharak kirakásuktól számított törési ideje exponenciális eloszlást követ 6 hónap várható értékkel. Határozza meg annak valószínűségét, hogy 50 kirakott pohárból legfeljebb 30 törik el egy év alatt!

   Megoldás: $\lambda = 1/\mathbb{E}(X) = 2$ év, tehát $P(X < 1) = 1 - exp{-2} = 0,8647$. Az 1 év alatt már összetört poharak száma binomiális eloszlát követ $n = 50$ és $p = 0,8647$ paraméterekkel. Ezért annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 30 db romlik el 1 éven belül, $\sum_{k=0}^{30}\binom{50}{k}0,8647^{k}0,1353^{50-k}$.

10. Egy bizonyos fajta égőből kettőt használunk a szobában, egy kapcsoló kapcsolja le-fel őket. A lámpák élettartama exponenciális eloszlást követ 1,5 év várható értékkel. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy három év múlva

    (a) mindkettő világít.

    (b) legalább az egyik világít.

    Megoldás: $\lambda = 1/\mathbb{E}(X) = 2/3$, tehát $P(X > 3) = e^{-2} = 0,1353$.

    (a) $P(\text{mindkettő világít}) = 0,1353^2 = 0,0183$.

    (b) $P(\text{legalább az egyik világít}) = 1 - 0,8647^2 = 0,2524$.

11. Egy buszmegállóban annak valószínűsége, hogy a következő t percen belül jön busz, $1 - e^{-1/8t}$.

    (a) Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 10 percet kell várakoznunk?

    (b) Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 5 percet, de kevesebb mint 10 percet kell várakoznunk?

    (c) Mi a várakozási időnk várható értéke?

    (d) Mi annak a valószínűsége, hogy ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még várnunk legalább 10 percet?

    Megoldás: $P(X > t) = 1 - e^{-1/8t}$, tehát $\lambda = 1/8$.

    (a) $P(X > 10) = 1 - e^{-10/8} = 0,7135$.

    (b) $P(5 < X < 10) = 0,2488$.

    (c) 8 perc.

    (d) $P(X > 14|X > 4) = P(X > 10) = 0,7135$.

12. Egy irodában átlag 5 percenként cseng a telefon. Az utolsó hívás 4 perce volt. Mi a valószínűsége, hogy az utolsó hívás és a következő hívás közti időtartam 5 és 10 perc közé esik?

    Megoldás: $\lambda = 1/5$, és $P(5 < X < 10|X > 4) = P(1 < X < 6) = e^{-1/5} - e^{-6/5} = 0,5175$.

13. A buszmegállóban a buszok egymás után exponenciális eloszlású időtartamonként érkeznek, melynek várható értéke 5 perc. Beállok a megállóba, és várok valakit, aki a harmadik busszal érkezik.

   (a) Várhatóan hány percig állok ott, mire megérkezik?
   (b) Mi a várakozási időm eloszlása?
   (c) Feltéve, hogy az első busz 4 perc múlva megérkezik, mi az ezután következő várakozási időm várható értéke és eloszlása?

   Megoldás: $\lambda = 1/5$.

   (a) $\mathbb{E}(X) = 15$.
   (b) Gamma eloszlás 3 és 1/5 paraméterekkel.
   (c) Ha az első busz megérkezett, mindegy hogy mikor, akkor még két buszt kell várnom, tehát a várható érték erre a várakozási időre 10 perc, az eloszlása pedig Gamma 2 és 1/5 paraméterekkel.

14. Augusztusi éjszakán fekszem a stégen, és folyamatosan nézem az eget. Óránként átlag 3,6 csillaghullást észlelek, azaz másodpercenként 999/1000 valószínűséggel nem látok csillaghullást, a maradék 1/1000 valószínűséggel látok egy csillaghullást.

   (a) Mi a valószínűsége, hogy egyetlen csillaghullást sem látok egy órán belül?
   (b) Mi a valószínűsége, hogy látok legalább egy csillaghullást fél órán belül?
   (c) Milyen eloszlást követ a fél órán belül, illetve az egy órán belül észlelt csillaghullások száma?
   (d) Milyen eloszlást követ az első általam észlelt csillaghullás időpontja?
   (e) Milyen eloszlást követ a második általam észlelt csillaghullás időpontja?
   (f) Milyen eloszlást követ a harmadik általam észlelt csillaghullás időpontja?

   Megoldás:

   (a) $(999/1000)^{3600} = (1 - \frac{3{,}6}{3600})^{3600} \approx e^{-3{,}6}$.
   (b) $1 - (999/1000)^{1800} \approx 1 - e^{-1{,}8}$
   (c) Közelítőleg Poisson eloszlást követnek 1,8 illetve 3,6 paraméterekkel.
   (d) Exponeciális, $\lambda = 3,6$ paraméterrel
   (e) Gamma, 2 és 3,6 paraméterekkel
   (f) Gamma, 3 és 3,6 paraméterekkel

15. Egy nem túl forgalmas útszakaszon egy óra alatt átlagosan 6 kocsi halad át.

   (a) Mi annak az esélye, hogy egy másodperc alatt nem jön autó?
   (b) Mi annak az esélye, hogy egy perc alatt nem jön autó?
   (c) Mi annak az esélye, hogy egy óra alatt nem jön autó?
   (d) Milyen eloszlást követ a 20 percen belül érkező autók száma?
   (e) Milyen eloszlást követ az első autó érkezésének időpontja?
   (f) Milyen eloszlást követ a második autó érkezésének időpontja?

   Megoldás:

   (a) 0,9983
   (b) $e^{-1/10} \approx 0,9983^60$
   (c) Közelítőleg $e^{-6} = 0,0025$
   (d) Közelítőleg Poisson 2 paraméterrel.
   (e) Exponenciális 6 paraméterrel.
   (f) Gamma, 2 és 6 paraméterekkel

16. Választunk egy véletlen számot egyenletes eloszlással az (1,4) intervallumon, majd szerkesztünk egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget, melynek ekkora a befogója. Mi a háromszö9g területének várható értéke?

   Megoldás: Ha a derékszögű háromszög befogója x, akkor a területe $x^2/2$. A kisorsolt szám sűrűségfüggvénye 1/3 az 1 és 4 közötti szakaszon, egyébként 0. Ezért a várható érték: $\int_1^4 \frac{x^2}{2 \cdot 3} \mathrm{d}x = 63/18$.

17. Egy számítógépes programozási nyelvben RND függvény előállít egy véletlen, egyenletes eloszlású valószínűségi változót a (0,1) intervallumban. Milyen transzformációnak vessük alá ezt a számot ahhoz, hogy a kapott szám λ paraméterű exponenciális legyen?

   Megoldás: $-\frac{1}{\lambda} \ln(RND)$

18. Egy árverésen a műkincsek élettartama exponenciális eloszlású, 100 év várható értékkel. Eladási áruk négyzetesen nő az idővel. Mi az eladási ár várható értéke?

   Megoldás: $\int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = 200$.

19. Mekkora legyen A és B értéke ahhoz, hogy az alábbi függvény eloszlásfüggvény legyen? Mi az ezzel az eloszlásfüggvénnyel megadott X valószínűségi változónak a várható értéke?

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < -2 \\ Ax + B, & \text{ha } -2 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$