

# Villamosmérnök A4

7. gyakorlat (2012. 10. 29-30.)

## Normális eloszlás és tulajdonságai

Az  $X$  valószínűségi változó **standard normális eloszlást** követ ( $\mathbb{E}(X) = 0$ ,  $\mathbb{SD}(X) = 1$ ), ha eloszlásfüggvénye illetve sűrűségfüggvénye

$$\Phi(x) := \mathbb{P}(X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-z^2/2) dz, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Az  $Y := \sigma X + \mu$  valószínűségi változó  $(\mu, \sigma)$  **paraméterű normális eloszlást** követ,  $\mathbb{E}Y = \mu$ ,  $\mathbb{SD}(Y) = \sigma$ , ahol  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ .

A  $Z := \exp(\sigma X + \mu)$  valószínűségi változó  $(\mu, \sigma)$  **paraméterű log-normális eloszlást** követ,  $\mathbb{E}Z = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ ,  $\mathbb{SD}(Z) = \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1} \exp(\mu + \sigma^2/2)$ .

- Legyen  $X$  standard normális eloszlású. Számoljuk ki a következő mennyiségeket:  $\mathbb{P}(X < 2.5)$ ,  $\mathbb{P}(-2 < X)$ ,  $\mathbb{P}(-1 < X < 5.2)$ ,  $\mathbb{P}(-1.5 < X < 1.9 | X > 0)$ !
- Legyen  $X$   $(\mu, \sigma)$  paraméterű normális eloszlású. Határozzuk meg  $\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$  értékét!
- Legyen  $X$  normális eloszlású 1.2 várható értékkel és 2 szórással. Számoljuk ki a következő mennyiségeket:  $\mathbb{P}(X < 1.5)$ ,  $\mathbb{P}(-10 < X)$ ,  $\mathbb{P}(-5 < X < 8)$ ,  $\mathbb{P}(-4.2 < X < 1.1 | X < 0)$ !
- Legyen  $X$  normális eloszlású 4 várható értékkel és 10 szórással. Milyen  $a > 0$ -ra lesz:  $\mathbb{P}(4 - a \leq X \leq 4 + a) = 0.8$ ?
- Egy  $X$  valószínűségi változó várható értéke 0, szórása pedig 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy  $X > \frac{1}{2}$ ; akkor, ha  $X$  eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes?
- A csokigyárban azt figyelték meg, hogy 1000 tejsokiból körülbelül 10 csoki tömege tér el az előírttól legalább 1 g-mal. Normális eloszlást feltételezve mekkora a csokik tömegének szórása?
- Magyarországon a férfiak testmagassága átlagosan 178 cm, 9 cm szórással.
  - Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott férfi testmagassága 169 és 187 cm közé esik? Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy ilyen ember magasabb mint 180 cm?
  - Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy férfi magasabb 2 méternél?
  - Mekkora testmagasság alatt van a férfiak 90%-a? Mekkora testmagasság felett van a férfiak 80%-a?
- Decemberi napokban Budapesten a minimális hőmérséklet legvalószínűbb értéke  $0^\circ\text{C}$ . A szélsőséges időjárás nagyon valószínűtlen: a napok 5%-ban nem mérünk  $+8^\circ\text{C}$ -nál kevesebbet vagy, hogy épp  $-8^\circ\text{C}$ -nál kevesebbet mérünk. Milyen valószínűségi változóval modellezné a minimum hőmérsékletet? Mi ennek a várható értéke, szórása? Mi annak a valószínűsége, hogy nem mérünk  $2^\circ\text{C}$ -nál kevesebbet egy decemberi napon?
- Szegeden a maximum hőmérséklet június hónapban (is) elég stabilis, sokéves statisztikai adatok alapján erre a hónapra eső tipikus maximum hőmérséklet  $35^\circ\text{C}$ ,  $4^\circ\text{C}$  szórással. Mi annak a valószínűsége, hogy egy nap  $42^\circ\text{C}$ -ot is eléri a hőmérő higanyszála? Átlagosan hány napot kell várunk ahhoz, hogy el tudjunk menni strandra, ha a jó időt  $40^\circ\text{C}$ -tól számítjuk? A legutóbbi június 31-én jártunk tizedjére strandon (mindig mentünk ha jó volt az idő). Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezt 31 nap alatt tudtuk abszolválni?
- Átlagosan 1000 felnőtt emberből 550 nő, 450 pedig férfi. A férfiak testsúlyának a szórása 10 kg és tudjuk, hogy férfiak fele 80 kg-nál könnyebb, míg a nőknél ugyanezen adatok 15 kg, illetve 60 kg. Normális eloszlást feltételezve, mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott férfi testsúlya 70 és 90 kg között van? Mi az esélye, hogy egy nő 45 kg-nál könnyebb? Mi annak a valószínűsége, hogy egy ember testsúlya 50 és 100 kg között van. Számítsuk ki a felnőttek átlag testsúlyát!
- Megfigyelték, hogy egy napszakban egy metrókocsiban az átlagos utaslétszám 80 fő. Azt is tudjuk, hogy a kocsik 80%-ában kevesebb mint 100 fő utazik. Feltételezzük, hogy az utaslétszám (közelítőleg) normális eloszlást követ, mekkora a valószínűsége, hogy az utaslétszám egy kocsiban: 50 főnél kevesebb? 85 és 110 fő között lesz?
- Az emberek különböző életkorban különböző sebességgel bicajoznak: a fiatalabbak gyorsabban, a tapasztaltabbak kimértebben tekernek. Tegyük fel, hogy a 15 és 30 év közötti fiatal átlag 20 km/h-val, 30 és 60 év közötti középkorú átlag 15 km/h-val, míg 60 év felett egyenlő eséllyel bicajozik valaki 10 km/h-nál kisebb illetve nagyobb sebességgel. Mindhárom esetben minden tizedik bringás sebessége tér el az átlagtól legalább 1 km/h-val. Magyarországon a bicajozó emberek 50%-a fiatal és 10%-a idősebb mint 60 év. Mi annak a valószínűsége, hogy egy fiatal legalább 30 km/h-val teker? Mi az esélye, hogy egy középkorú kevesebb, mint 10 km/h-val hajt és mi a valószínűsége, hogy egy idős 5 km/h-val gyorsabban halad? Mi annak a valószínűsége, hogy egy bicajozó sebessége legalább 15 km/h? Adjuk meg a bicajozók sebességének eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! Számítsuk ki a bicajosok átlagsebességét!

13. Egy csokiautomata kis finom csokimazsolákat gyárt és csomagol. A csokimazsolák csinos csomagolása elég érzékeny, ezért a gép csak akkor tudja biztonságosan becsomagolni a csokimazsolát, ha annak tömege 4 és 6 g közé esik. A csokimazsolák tömege normális eloszlást követ: a legnagyobb valószínűséggel 5 g-os csokimazsolák készülnek. Továbbá a csokimazsolák 80%-ának a tömege a normálistól való eltérése nem haladja meg az 1 g-ot. Mi annak a valószínűsége, hogy egy csokimazsola tömege 4 és 6 g közé esik? Átlagosan hány csokimazsolát kell a gépnek legyártani, hogy 400-at biztonságosan csomagolni tudjon?
14. Egy pékségben minden nap 100 db kenyeret szeretnének legyártani. Ehhez átlagosan 100 kg alapanyagot használnak fel. A pékek pontos emberek, azonban éjjel ébrednek és hajnalban dolgoznak így elég álmosak ezért átlagosan minden 7-edik kenyér tömege az átlagostól legalább 10 dkg-mal eltér. Az elkészült kenyereknek mi az átlagos tömege és mekkora a szórásuk?
15. Sok intelligencia teszt normális eloszlást követ, 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással. Ha ezeknek a teszteknek és értékelésüknek hihetünk, akkor az emberiség hány százalékának van 95 és 110 pont között az IQ-ja? A 100 pont körüli mekkora intervallumban van az emberiség 50%-ának az IQ-ja? Egy 2500 fős településen várhatóan hány embernek lesz 125 pont fölött az IQ-ja?
16. Az IQ teszteknek még mindig hiszünk és tegyük fel, hogy az eredmény 100 pont várható értékű és 15 szórású normális eloszlást követ. A tesztek megírt és kiértékelt alanyokat általában 3 csoportba szokták sorolni: alacsony-, átlagos-, illetve magas intelligenciahányadosúak. A résztvevőknek rendre 20, 65 illetve 15%-a került a megfelelő csoportokba. Hol húzták meg a határokat, azaz melyek azok a pontszámok melyek megkülönböztetik az egyes csoportokat?
17. Tegyük fel, hogy egy nagy villamosmérnök évfolyam ZH eredményei normális eloszlást követnek, 62 pont átlaggal és 12 szórással.
  - (a) Mi annak a valószínűsége, hogy egy hallgató 85 pontnál többet szerez?
  - (b) Azon hallgató, melynek eredménye a dolgozatok legrosszabb 25%-ában van automatikusan megbukott. Legalább hány pontot kellett szereznünk, hogy ha átmentünk a ZH-n? Egy véletlenül választott hallgató mekkora eséllyel szerzett a minimum pontszámtól legalább 10 ponttal többet?
  - (c) Azon hallgatóknak, akik elérték a 70 pontot hány százaléka érte el a 80 pontot is?
18. Kora reggel a mindig tömött négyeshatos megállójában 2 villamosmérnök hallgató várakozik: Péter és Miklós. Mindketten ugyanoda, A4 gyakorlatra szeretnének eljutni. A villamosok egymás után érkeznek átlagosan 80 ember ül rajtuk és tipikusan 2 perc telik el két villamos érkezése között. A villamossal nagyon sok ember is utazhat, azonban minden tizedik villamoson utazik csak több mint 100 ember. A hallgatók szeretnének kényelmesen utazni, ezért csak akkor szállnak fel, ha legfeljebb 60 ember ül a villamoson.
  - (a) Ha egyszerre szállnak fel, hányadik villamossal tudnak elmenni? Átlagosan hány perc alatt érnek be az egyetemre? (tegyük fel, hogy az utazás fix 15 perc hosszúságú)
  - (b) Néha, az első olyan villamoson, amire fel tudnának szállni, megtippelik körülbelül hányan lehetnek. Egészen pontosan: Miklós azt állítja, hogy nem lesz több mint 40 ember rajta, Péter pedig azt, hogy több mint 50 ember lesz rajta. Mi a valószínűbb, ki fog előbb elutazni?
19. Magyar autópályákon a sebességkorlátozás: 130 km/h. Az elszaporodott balesetek miatt a sebességtűllépés fokozottan büntetett: a fizetendő büntetés ezer forintban túllépett kilométeróránként lineárisan növekszik (azaz 10 km/h túllépés esetén 10 ezer forintot kell fizetni). Ezért a szabálysértések száma jelentősen megcsappant, azonban így is azt tapasztalják, hogy havi átlag 12 autós túllépi a sebességhatárt. Tegyük fel, hogy az autósok sebessége átlag 120 km/h, 15 km/h szórással.
  - (a) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott autós túllépi a sebességhatárt?
  - (b) 7 véletlenül választott autósból mi a valószínűsége, hogy pontosan ketten lépik túl a sebességhatárt?
  - (c) 100 autóstól átlag mennyi büntetést szednek be?
  - (d) Átlag mennyi bevételt könyvelhet el hónap végén a rendőrség?
20. Válaszoljuk meg az előbbi feladat kérdéseit akkor is, ha a fizetendő büntetés kvadratikusan nő kilométeróránként? (azaz 10 km/h túllépés 100 ezer forint bírságot von maga után)
21. Nemcsak az autópályákon de a közutakon is nagyon sok a sebességtűllépés. A rendőrök általában egy hídról fényképezik le a gyanús autókat, melyek sebessége normális eloszlású 84 km/h várható értékkel, 5 km/h szórással. Ha a sebességhatár 90 km/h, 200 autósból várhatóan hány fogja túllépni a sebességhatárt? Egy átlagos nap a rendőrök 40 autóst fogtak meg. Hány autóst kellett ehhez lefényképezniük?
22. Felhajtunk az autópályára, az előbbi feladatok alapján tudjuk, hogy a sebességkorlátozás 130 km/h. A kezdősebességünk 100 km/h, majd rálépünk a gázra, azaz választunk egy véletlen gyorsulást 200 km/h<sup>2</sup> várható értékkel és 30 km/h<sup>2</sup> szórással. Feltéve, hogy gyorsulásunk nem haladta meg az 210 km/h<sup>2</sup>-et, mekkora valószínűséggel vagyunk még határon belül 10 perc elteltével? Hány perc elteltével lépünk le a gázzal ha azt szeretnénk, hogy akkor 95% biztonsággal ne fényképezzenek le? (negatív gyorsulás jelentse azt, hogy valami hiba miatt félre kellett állnunk)
23. Egy feleletválasztós felvételi teszt 200 kérdést tartalmaz: minden kérdésnél 4 opció van, melyekből pontosan egy helyes. Azokat veszik fel, akik legalább 50 kérdésre helyesen válaszolnak. Tegyük fel, hogy Véletlen Viktor véletlenül betévedt a felvételre és minden kérdésnél véletlenül (egyenlő valószínűséggel) megjelöl egy választ. Mi a valószínűsége, hogy felveszik?

24. Tőzsdén a következő feltételeket (is) tehetjük egy részvény áralakulására vonatkozóan: ha most kezdünk el kereskedni egy adott részvénnyel, melynek ára  $s_0$ , akkor ennek  $t$  idő múlva  $s_t = (1 + r)s_0$ -ra változik az ára, ahol  $r$  normális eloszlású (ez a ráta), 0 várhatóértékkel és  $t$  szórásnégyzettel (az időt mérjük években és legyen  $t \leq 1$ ). Elkezdünk kereskedni ezzel a részvénnyel  $S_0 = 10000$  Ft kezdőtőkével, hogyan változik időben a tőkénk, milyen modellt írna fel  $S_t$ -re? Mi az eloszlása  $S_t$ -nek? *Segítség: tegyük fel, hogy minden  $t/n$  hosszúságú részintervallumban ( $n$  nagy)  $r/n$  eloszlású a ráta növekedése/csökkenése és az egyes részintervallumokban ez egymástól függetlenül változik, valamint kamatos kamattal számolunk, azaz:*

$$S_t \approx S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

25. Hogyan generálna le  $(\mu, \sigma)$  paraméterű normális eloszlást követő véletlen valós számokat a `RAND()` (`VÉL()`) függvénnyel?