Villamosmérnök A4

7. gyakorlat (2012. 10. 29-30.)

Normális eloszlás és tulajdonságai

Azt mondjuk, hogy egy X valószínűségi változó **standard normális eloszlást** követ, ha $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\Phi(x) := \mathbb{P}(X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-z^2/2\right) \mathrm{d}z,$$

Szimmetria: $\Phi(x) + \Phi(-x) \equiv 1$ (az eloszlásfüggggvény értékeit tipikusan táblázatból nyerjük ki). X sűrűségfüggvénye:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

X várható értéke 0, szórása pedig 1. Az $Y := \sigma X + \mu$ valószínűségi változó (μ, σ) **paraméterű normális eloszlást** követ, $\mathbb{E}Y = \mu$, $\mathbb{SD}(Y) = \sigma$, ahol $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Hasonlóan, a $Z := \exp(\sigma X + \mu)$ valószínűségi változó (μ, σ) **paraméterű log-normális eloszlást** követ, $\mathbb{E}Z = \exp(\mu + \sigma^2/2)$, $\mathbb{SD}(Z) = \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1}\exp(\mu + \sigma^2/2)$.

1. Legyen X standard normális eloszlású. Számoljuk ki a következő mennyiségeket: $\mathbb{P}(X < 2.5)$, $\mathbb{P}(-2 < X)$, $\mathbb{P}(-1 < X < 5.2)$, $\mathbb{P}(-1.5 < X < 1.9 \mid X > 0)$!

   Megoldás: $\mathbb{P}(X < 2.5) = \Phi(2.5) \approx 0.9938$, $\mathbb{P}(-2 < X) = 1 - \mathbb{P}(X < -2) = 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) \approx 0.977$, $\mathbb{P}(-1 < X < 5.2) = \Phi(5.2) - \Phi(-1) = \Phi(5.2) + \Phi(1) - 1 \approx 0.841$, $\mathbb{P}(-1.5 < X < 1.9 \mid X > 0) = \frac{\mathbb{P}(0<X<1.9)}{\mathbb{P}(X>0)} = 2(\Phi(1.9) - \Phi(0)) \approx 0.943$, mert $\mathbb{P}(X < 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$.

2. Legyen X (μ, σ) paraméterű normális eloszlású. Határozzuk meg $\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 2\sigma)$ értékét!

   Megoldás:

$$\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = \mathbb{P}\left(-3 \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le 2\right) = \Phi(2) - \Phi(-3) = \Phi(2) + \Phi(3) - 1 \approx 0.976$$

3. Legyen X normális eloszlású 1.2 várható értékkel és 2 szórással. Számoljuk ki a következő mennyiségeket: $\mathbb{P}(X < 1.5)$, $\mathbb{P}(-10 < X)$, $\mathbb{P}(-5 < X < 8)$, $\mathbb{P}(-4.2 < X < 1.1 \mid X < 0)$!

   Megoldás: Mivel X $(1.2, 2)$ paraméterű normális ezért $\frac{1}{2}(X - 1.2)$ standard normális eloszlású. Így $\mathbb{P}(X < 1.5) = \Phi(0.15) \approx 0.56$, $\mathbb{P}(-10 < X) = 1 - \mathbb{P}(X < -10) = \mathbb{P}(X < 10) = \Phi(4.4) \approx 0.99$, $\mathbb{P}(-5 < X < 8) = \mathbb{P}(-3.1 < \frac{1}{2}(X - 1.2) < 3.4) = \Phi(3.4) - \Phi(-3.1) = \Phi(3.4) + \Phi(3.1) - 1 \approx 0.998$, $\mathbb{P}(-4.2 < X < 1.1 \mid X < 0) = \frac{\mathbb{P}(-4.2<X<0)}{\mathbb{P}(X<0)} = 3.65(\mathbb{P}(X < 0) - \mathbb{P}(X < -4.2)) = 3.65(0.274 - \Phi(-2.7)) = 3.65(\Phi(2.7) - 0.726) \approx 0.987$, mert $\mathbb{P}(X < 0) = \Phi(-0.6) = 1 - \Phi(0.6) \approx 0.274$.

4. Legyen X normális eloszlású 4 várható értékkel és 10 szórással. Milyen $a > 0$-ra lesz: $\mathbb{P}(4 - a \le X \le 4 + a) = 0.8$?

   Megoldás: Standardizálunk: $\mathbb{P}(4 - a \le X \le 4 + a) = \mathbb{P}(-a/10 \le (X-4)/10 \le a/10) = \Phi(a/10) - \Phi(-a/10) = 2\Phi(a/10) - 1 = 0.8$, abból $\Phi(a/10) = 0.9$, ezt a táblázatból visszakeresve: $a \approx 12.8$.

5. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása pedig 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > \frac{1}{2}$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes?

   Megoldás: Ha X normális, akkor $\mathbb{P}(X > 1/2) = 1 - \Phi(1/2) \approx 0.31$. Ha X egyenletes – valamilyen (a, b) intervallumon $(a < b)$ – akkor $0 = \mathbb{E}X = \frac{a+b}{2}$, illetve $1 = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$, ebből $a = -\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3}$, így a sűrűségfüggvénye X-nek $\frac{1}{2\sqrt{3}}$, ha $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ egyébként 0. Tehát $\mathbb{P}(X > 1/2) = \frac{\sqrt{3}-1/2}{2\sqrt{3}} \approx 0.36$.

6. A csokigyárban azt figyelték meg, hogy 1000 tejcsokiból körülbelül 10 csoki tömege tér el az előírttól legalább 1 g-mal. Normálist eloszlást feltételezve mekkora a csokik tömegének szórása?

   Megoldás: Jelölje X egy véletlen csoki tömegét, ennek várható értékét illetve szórását pedig (μ, σ). Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{10}{1000} &= \mathbb{P}(|X-\mu| \ge 1) = \mathbb{P}(X - \mu \le -1) + \mathbb{P}(X - \mu \ge 1) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{-1}{\sigma}\right) + 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1}{\sigma}\right) = \\ &= 2 - 2\mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

   amiből azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0.995,$$

   azaz $\frac{1}{\sigma} = 2.58$, így $\sigma \approx 0.39$.

7. Magyarországon a férfiak testmagassága átlagosan 178 cm, 9 cm szórással.

   (a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott férfi testmagassága 169 és 187 cm közé esik? Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy ilyen ember magasabb mint 180 cm?

(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy férfi magasabb 2 méternél?

(c) Mekkora testmagasság alatt van a férfiak 90%-a? Mekkora testmagasság felett van a férfiak 80%-a?

Megoldás: Jelölje X egy férfi véletlen testmagasságát, melynek várható értéke 178, szórása 9.

(a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(169 < X < 187) &= \mathbb{P}(X < 187) - \mathbb{P}(X < 169) = \mathbb{P}\left(\frac{X-178}{9} < 1\right) - \mathbb{P}\left(\frac{X-178}{9} < -1\right) \\
&= \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0.68. \\
\mathbb{P}(X > 180 \,|\, 169 < X < 187) &= \frac{\mathbb{P}(180 < X < 187)}{\mathbb{P}(169 < X < 187)} = \frac{1}{2\Phi(1)-1}\left(\mathbb{P}\left(\frac{X-178}{9} < 1\right) - \mathbb{P}\left(\frac{X-178}{9} < \frac{2}{9}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{2\Phi(1)-1}(\Phi(1) - \Phi(2/9)) \approx 0.371.
\end{aligned}$$

(b)

$$\mathbb{P}(X > 200) = 1 - \mathbb{P}(X < 200) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-178}{9} < \frac{22}{9}\right) = 1 - \Phi(22/9) \approx 0.007.$$

(c) Keressek azokat az a, b számokat, melyekre $\mathbb{P}(X < a) = 0.9$, illetve $\mathbb{P}(X > b) = 0.8$. Előbbi esetében:

$$\mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}\left(\frac{X-178}{9} < \frac{a-178}{9}\right) = \Phi\left(\frac{a-178}{9}\right) = 0.9$$

azaz $a = 1.28 \times 9 + 178 \approx 189.52$. Az utóbbi esetében tudjuk, hogy $b < 178$ kell legyen, ezért

$$\mathbb{P}(X > b) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-178}{9} < \frac{b-178}{9}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X-178}{9} < \frac{178-b}{9}\right) = \Phi\left(\frac{178-b}{9}\right) = 0.8$$

azaz $b = 178 - 0.84 \times 9 \approx 170.44$.

8. Decemberi napokban Budapesten a minimális hőmérséklet legvalószínűbb értéke 0 °C. A szélsőséges időjárás nagyon valószínűtlen: a napok 5%-ban nem mérünk +8 °C-nál kevesebbet vagy, hogy épp −8 °C-nál kevesebbet merünk. Milyen valószínűségi változóval modellezné a minimum hőmérsékletet? Mi ennek a várható értéke, szórása? Mi annak a valószínűsége, hogy nem mérünk 2 °C-nál kevesebbet egy decemberi napon?

Megoldás: Jelölje X egy decemberi napon a minimális hőmérsékletet (Celsius fokban). A minimális hőmérséklet normális eloszlásúnak vehető (sok kis tényező eredejő a hőmérséklet). Normális esetben a módusz egybeesik a várható értékkel, azaz X várható értéke 0. X szórása (σ) pedig:

$$\begin{aligned}
0.05 &= \mathbb{P}(X > 8) + \mathbb{P}(X < -8) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-0}{\sigma} < \frac{8}{\sigma}\right) + \mathbb{P}\left(\frac{X-0}{\sigma} < \frac{-8}{\sigma}\right) = \\
&= 2 - 2\mathbb{P}\left(\frac{X-0}{\sigma} < \frac{8}{\sigma}\right), \text{ azaz } \ \mathbb{P}\left(\frac{X-0}{\sigma} < \frac{8}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{8}{\sigma}\right) = 0.975,
\end{aligned}$$

így $\sigma = \frac{8}{1.96} \approx 4.08$.
Végül:

$$\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-0}{4.08} < \frac{2}{4.08}\right) = 1 - \Phi(0.49) \approx 0.312.$$

9. Szegeden a maximum hőmérséklet június hónapban (is) elég stabilis, sokéves statisztikai adatok alapján erre a hónapra eső tipikus maximum hőmérséklet 35 °C, 4 °C szórással. Mi annak a valószínűsége, hogy egy nap 42°C-ot is eléri a hőmérő higanyszála? Átlagosan hány napot kell várnunk ahhoz, hogy el tudjunk menni strandra, ha a jó időt 40 °C-tól számítjuk? A legutóbbi június 31-én jártunk tizedjére strandon (mindig mentünk ha jó volt az idő). Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezt 31 nap alatt tudtuk abszolválni?

Megoldás: Jelölje X egy júniusi napon a maximális hőmérsékletet (Celsius fokban). X normális eloszlású, melynek várható értéke 35, szórása pedig 4.

$$\mathbb{P}(X > 42) = 1 - \mathbb{P}(X < 42) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-35}{4} < \frac{7}{4}\right) = 1 - \Phi(1.75) \approx 0.04.$$

A siker – tehát a strandra menés – valószínűsége:

$$\mathbb{P}(X > 40) = 1 - \mathbb{P}(X < 40) = \mathbb{P}\left(\frac{X-35}{4} < \frac{5}{4}\right) = 1 - \Phi(1.25) \approx 0.11,$$

Az első olyan alkalomra várt napok száma, amikor jó idő volt, geometriai eloszlású $p = 0.11$ paraméterrel. Ennek a várható értéke $\frac{1}{p} \approx 9.45$. Tehát átlagosan 10 napot kell várni ahhoz, hogy el tudjunk menni strandra.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{31 nap alatt voltunk 10-szer strandon, de június 31-én voltunk}) = \\
&= \mathbb{P}(\text{az első 30 nap alatt voltunk 9-szer strandon és június 31-én is voltunk}) = \\
&= \mathbb{P}(\text{30 nap alatt voltunk 9-szer strandon})\mathbb{P}(\text{június 31-én voltunk strandon}) = \\
&= \binom{30}{9} p^9 (1-p)^{21} \times p = \binom{30}{9} p^{10} (1-p)^{21} \approx 2.4 \times 10^{-4}.
\end{aligned}$$

10. Átlagosan 1000 felnőtt emberből 550 nő, 450 pedig férfi. A férfiak testsúlyának a szórása 10 kg és tudjuk, hogy férfiak fele 80 kg-nál könnyebb, míg a nőknél ugyanezen adatok 15 kg, illetve 60 kg. Normális eloszlást feltételezve, mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott férfi testsúlya 70 és 90 kg között van? Mi az esélye, hogy egy nő 45 kg-nál könnyebb? Mi annak a valószínűsége, hogy egy ember testsúlya 50 és 100 kg között van? Számítsuk ki a felnőttek átlag testsúlyát!

Megoldás: Jelölje X egy nő véletlen testsúlyát, illetve Y egy férfiét (kg-ban). Legyen X, illetve Y várható értéke μ_X, illetve μ_Y. A feladat szövege alapján: X szórása 15, míg Y-é csak 10; továbbá

$$\mathbb{P}(X < 60) = \Phi\left(\frac{60 - \mu_X}{15}\right) = 0.5 = \mathbb{P}(Y < 80) = \Phi\left(\frac{80 - \mu_Y}{10}\right).$$

Ebből kapjuk, hogy $\mu_X = 60$, illetve $\mu_Y = 80$. Ezt számolás nélkül rögtön megkaphattuk volna, ha arra gondolunk, hogy a normális eloszlás sűrűségfüggvénye szimmetrikus a várható értéke körül (azaz 1/2 súly esik tőle jobbra illetve balra). Végül:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(70 < Y < 90) = \mathbb{P}(Y < 90) - \mathbb{P}(Y < 70) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0.68\\
&\mathbb{P}(X < 45) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 0.16\\
&\mathbb{P}(50 \text{ és } 100 \text{ kg között van egy ember testsúlya}) = \frac{550}{1000}\mathbb{P}(50 < X < 100) + \frac{450}{1000}\mathbb{P}(50 < Y < 100) =\\
&= 0.55(\mathbb{P}(X < 100) - \mathbb{P}(X < 50)) + 0.45(\mathbb{P}(Y < 100) - \mathbb{P}(Y < 50)) =\\
&= 0.55(\Phi(40/15) - \Phi(-10/15)) + 0.45(\Phi(2) - \Phi(-3)) =\\
&= 0.55(\Phi(8/3) + \Phi(2/3) - 1) + 0.45(\Phi(2) + \Phi(3) - 1) \approx 0.85.
\end{aligned}$$

Felnőttek átlag testsúlya: $0.55\mathbb{E}(X) + 0.45\mathbb{E}(Y) = 0.55\mu_X + 0.45\mu_Y = 0.55 \times 60 + 0.45 \times 80 = 69.$

11. Megfigyelték, hogy egy napszakban egy metrókocsiban az átlagos utaslétszám 80 fő. Azt is tudjuk, hogy a kocsik 80%-ában kevesebb mint 100 fő utazik. Feltételezzük, hogy az utaslétszám (közelítőleg) normális eloszlást követ, mekkora a valószínűsége, hogy az utaslétszám egy kocsiban: 50 főnél kevesebb? 85 és 110 fő között lesz?

Megoldás: Jelölje X a metrókocsiban lévő emberek véletlen számát. Felthető, hogy X normális eloszlású, melynek várható értéke 80, szórása (σ) pedig a következőkből adódik:

$$0.8 = \mathbb{P}(X < 100) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 80}{\sigma} < \frac{20}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right),$$

amiből – táblázat segítségével – azt kapjuk, hogy $\sigma = \frac{20}{0.84} \approx 23.81$. Ebből

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < 50) &= \mathbb{P}\left(\frac{X - 80}{23.81} < -1.26\right) = \Phi(-1.26) = 1 - \Phi(1.26) \approx 0.1,\\
\mathbb{P}(85 < X < 110) &= \mathbb{P}(X < 110) - \mathbb{P}(X < 85) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 80}{23.81} < 1.26\right) - \mathbb{P}\left(\frac{X - 80}{23.81} < 0.21\right) =\\
&= \Phi(1.26) - \Phi(0.21) \approx 0.313.
\end{aligned}$$

12. Az emberek különböző életkorban különböző sebességgel bicajoznak: a fiatalabbak gyorsabban, a tapasztaltabbak kimértebben tekernek. Tegyük fel, hogy a 15 és 30 év közötti fiatal átlag 20 km/h-val, 30 és 60 év közötti középkorú átlag 15 km/h-val, míg 60 év felett egyenlő eséllyel bicajozik valaki 10 km/h-nál kisebb illetve nagyobb sebességgel. Mindhárom esetben minden tizedik bringás sebessége tér el az átlagtól legalább 1 km/h-val. Magyarországon a bicajozó emberek 50%-a fiatal és 10%-a idősebb mint 60 év. Mi annak a valószínűsége, hogy egy fiatal legalább 30 km/h-val teker? Mi az esélye, hogy egy középkorú kevesebb, mint 10 km/h-val hajt és mi a valószínűsége, hogy egy idős 5 km/h-val gyorsabban halad? Mi annak a valószínűsége, hogy egy bicajozó sebessége legalább 15 km/h? Adjuk meg a bicajozók sebességének eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! Számítsuk ki a bicajosok átlagsebességét!

Megoldás: Jelölje X, Y, illetve Z rendre a fiatal-, középkorú-, illetve tapasztalt (60 feletti) bringás véletlen sebességét, ami normális eloszlást követ. X várható értéke 20, Y-é 15, míg Z várható értéke 10 (km/h) (ϕ szimmetriája miatt). A feladat szövege alapján a szórásokra fennáll, hogy $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma_Z$, tehát elegendő az egyiket meghatározni:

$$\begin{aligned}
0.1 &= \mathbb{P}(|X - 20| > 1) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 20}{\sigma_X} > \frac{1}{\sigma_X}\right) + \mathbb{P}\left(\frac{X - 20}{\sigma_X} < \frac{-1}{\sigma_X}\right) =\\
&= 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma_X}\right) + \Phi\left(\frac{-1}{\sigma_X}\right) = 2 - 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_X}\right),
\end{aligned}$$

azaz $0.95 = \Phi(1/\sigma_X)$, ebből $\sigma_X = 0.61$. Kérdésekre a válaszok:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X > 30) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X - 20}{0.61} < 16.4\right) = 1 - \Phi(16.4) \approx 0.\\
&\mathbb{P}(Y < 10) = \Phi(-5/0.61) = 1 - \Phi(8.2) \approx 0.\\
&\mathbb{P}(Z > 5) = 1 - \Phi(-5/0.61) = \Phi(5/0.61) \approx 1.\\
&\mathbb{P}(\text{bicajozó sebessége min. 15 km/h}) = 0.5\mathbb{P}(X > 15) + 0.4\mathbb{P}(Y > 15) + 0.1\mathbb{P}(Z > 15) =\\
&= 0.5(1 - \Phi(-5/0.61)) + 0.4 \times 0.5 + 0.1(1 - \Phi(5/0.6)) \approx 0.7.
\end{aligned}$$

Bicajozók eloszlásfüggvénye, ha $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{P}(\text{egy bicajos sebessége} < x \text{ km/h}) = 0.5\mathbb{P}(X < x) + 0.4\mathbb{P}(Y < x) + 0.1\mathbb{P}(Z < x) = \\ &= 0.5\Phi\left(\frac{x-20}{0.61}\right) + 0.4\Phi\left(\frac{x-15}{0.61}\right) + 0.1\Phi\left(\frac{x-10}{0.61}\right). \end{aligned}$$

Bicajosok átlagsebessége: $0.5\mathbb{E}(X) + 0.4\mathbb{E}(Y) + 0.1\mathbb{E}(Z) = 0.5 \times 20 + 0.4 \times 15 + 0.1 \times 10 = 17$ (km/h).

13. Egy csokiautomata kis finom csokimazsolákat gyárt és csomagol. A csokimazsolák csinos csomagolása elég érzékény, ezért a gép csak akkor tudja biztonságosan becsomagolni a csokimazsolát, ha annak tömege 4 és 6 g közé esik. A csokimazsolák tömege normális eloszlást követ: a legnagyobb valószínűséggel 5 g-os csokimazsolák készülnek. Továbbá a csokimazsolák 80%-ának a tömege a normálistól való eltérése nem haladja meg az 1 g-ot. Mi annak a valószínűsége, hogy egy csokimazsola tömege 4 és 6 g közé esik? Átlagosan hány csokimazsolát kell a gépnek legyártani, hogy 400-at biztonságosan csomagolni tudjon?

    Megoldás: Jelölje X egy csokimazsola véletlen súlyát. A normális eloszlás esetében a módusz egybeesik a várható értékkel, tehát X várható értéke 5 (g). X szórása (σ) pedig:

$$0.8 = \mathbb{P}(|X-5| < 1) = \mathbb{P}\left(\frac{X-5}{\sigma} < \frac{1}{\sigma}\right) - \mathbb{P}\left(\frac{X-5}{\sigma} < \frac{-1}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - 1,$$

    amiből kapjuk, hogy $0.9 = \Phi(1/\sigma)$, azaz $\sigma = 0.78$ (g).

$$\mathbb{P}(4 < X < 6) = \mathbb{P}(X < 6) - \mathbb{P}(X < 4) = \mathbb{P}\left(\frac{X-5}{0.78} < 1.28\right) - \mathbb{P}\left(\frac{X-5}{0.78} < -1.28\right) = 2\Phi(1.28) - 1 \approx 0.8$$

    Ahhoz tehát, hogy 400-at biztonságosan csomagolni tudjon körülbelül $n = \frac{400}{0.8} = 500$-at el kell készíteni.

14. Egy pékségben minden nap 100 db kenyeret szeretnének legyártani. Ehhez átlagosan 100 kg alapanyagot használnak fel. A pékek pontos emberek, azonban éjjel ébrednek és hajnalban dolgoznak így elég álmosak ezért átlagosan minden 7-edik kenyér tömege az átlagostól legalább 10 dkg-mal eltér. Az elkészült kenyereknek mi az átlagos tömege és mekkora a szórásuk?

    Megoldás: Mivel 100 db kenyeret gyártanak és ehhez átlagosan 100 kg alapanyagot használnak fel (egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az alapanyagot 100%-ban felhasználják), ezért az átlagos kenyértömeg 1 kg. Feltehető továbbá, hogy a kenyértömeg normális eloszlású, így ennek a szórása (σ):

$$\frac{1}{7} = \mathbb{P}(|X-1| > 0.1) = \mathbb{P}\left(\frac{X-1}{\sigma} < \frac{-0.1}{\sigma}\right) + 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-1}{\sigma} < \frac{0.1}{\sigma}\right) = 2 - 2\Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right),$$

    azaz $0.93 = \Phi(0.1/\sigma)$, ebből: $\sigma \approx 0.0685$ kg, ami 6.85 dkg.

15. Sok intelligencia teszt normális eloszlást követ, 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással. Ha ezeknek a teszteknek és értékelésüknek hihetünk, akkor az emberiség hány százalékának van 95 és 110 pont között az IQ-ja? A 100 pont körüli mekkora intervallumban van az emberiség 50%-ának az IQ-ja? Egy 2500 fős településen várhatóan hány embernek lesz 125 pont fölött az IQ-ja?

    Megoldás: Jelölje X az intelligencia teszt eredményét, ami normális eloszlást követ 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással, így

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(95 < X < 110) &= \mathbb{P}(X < 110) - \mathbb{P}(X < 95) = \mathbb{P}\left(\frac{X-100}{15} < \frac{2}{3}\right) - \mathbb{P}\left(\frac{X-100}{15} < \frac{-1}{3}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right) \approx 0.378 \end{aligned}$$

    Tehát az emberiség 37.8%-ának van az IQ-ja 95 és 110 között.
    Meg kell határoznunk x-et ($x > 0$) úgy, hogy:

$$0.5 = \mathbb{P}(100 - x < X < 100 + x) = 2\mathbb{P}\left(\frac{X-100}{15} < \frac{x}{15}\right) - 1 = 2\Phi\left(\frac{x}{15}\right) - 1,$$

    amiből $\Phi(x/15) = 0.75$, így $x \approx 15 \times 0.67 = 10.05$. Végül:

$$\mathbb{P}(X > 125) = 1 - \mathbb{P}(X < 125) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-100}{15} < \frac{5}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0.0478$$

    Egy 2500 fős településen azoknak a száma, akik IQ-ja 125 fölött van binomiális eloszlású $n = 2500$, $p = 0.0478$ paraméterrel, tehát átlag $2500 \times 0.0478 \approx 119.5$ ember rendelkezik 125 feletti IQ-val.

16. Az IQ teszteknek még mindig hiszünk és tegyük fel (mint előbb), hogy az eredmény 100 pont várható értékű és 15 szórású normális eloszlást követ. A teszteket megírt és kiértékelt alanyokat általában 3 csoportba szokták sorolni: alacsony-, átlagos-, illetve magas intelligenciahányadosúak. A résztvevőknek rendre 20, 65 illetve 15%-a került a megfelelő csoportokba. Hol húzták meg a határokat, azaz melyek azok a pontszámok melyek megkülönböztetik az egyes csoportokat?

Megoldás: Jelölje X az IQ teszt eredményét, ami normális eloszlású 100 várható értékkel és 15 szórással. Jelölje a választóvonalakat $x_1 < x_2$, ezekre a következőket tudjuk:

$$0.2 = \mathbb{P}(X < x_1) = \mathbb{P}\left(\frac{X-100}{15} < \frac{x_1-100}{15}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{100-x_1}{15}\right),$$

vagyis $x_1 = 100 - 15 \times 0.84 = 88$. Végül az x_2:

$$0.85 = \mathbb{P}(X < x_2) = \mathbb{P}\left(\frac{X-100}{15} < \frac{x_2-100}{15}\right) = \Phi\left(\frac{x_2-100}{15}\right),$$

vagyis $x_1 = 100 + 15 \times 1.04 = 115.6$. Tehát 88 pont alatt az alacsony IQ-júak, 88 és 115.6 között az átlagos IQ-júak, míg 115.6 fölött a magas intelligenciahányadosúak csoportja húzódik.

17. Tegyük fel, hogy egy nagy villamosmérnök évfolyam ZH eredményei normális eloszlást követnek, 62 pont átlaggal és 12 szórással.

    (a) Mi annak a valószínűsége, hogy egy hallgató 85 pontnál többet szerez?

    (b) Azon hallgató, melynek eredménye a dolgozatok legrosszabb 25%-ában van automatikusan megbukott. Legalább hány pontot kellett szereznünk, hogy ha átmentünk a ZH-n? Egy véletlenül választott hallgató mekkora eséllyel szerzett a minimum pontszámtól legalább 10 ponttal többet?

    (c) Azon hallgatóknak, akik elérték a 70 pontot hány százaléka érte el a 80 pontot is?

    Megoldás: Jelölje X a villamomérnök ZH eredményét, ami 62 pont várható értékű és 12 szórású, valamint normális eloszlású.

    (a) $\mathbb{P}(X > 85) = 1 - \mathbb{P}(X < 85) = 1 - \Phi(1.92) \approx 0.028$

    (b) Keressük x-et (min. pontszám), melyre az kell, hogy: $0.25 = \mathbb{P}(X < x) = \Phi((x-62)/12) = 1 - \Phi((62-x)/12)$, amiből $\Phi((62-x)/12) = 0.75$, azaz $x = 62 - 0.67 \times 12 \approx 54$. Tehát legalább 54 pontot kellett, hogy szerezzünk, ha átmentünk. Végül: $\mathbb{P}(X > 64) = 1 - \mathbb{P}(X < 64) = 1 - \Phi(1/6) \approx 0.434$.

    (c)
    $$\mathbb{P}(X > 80 \,|\, X > 70) = \frac{\mathbb{P}(X > 80)}{\mathbb{P}(X > 70)} = \frac{1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-62}{12} < \frac{3}{2}\right)}{1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-62}{12} < \frac{2}{3}\right)} = \frac{1 - \Phi\left(\frac{3}{2}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 0.265$$

    Tehát 26.5%-a érte el a 80 pontot is azok közül akik elérték a 70 pontot.

18. Kora reggel a mindig tömött négyeshatos megállójában 2 villamosmérnök hallgató várakozik: Péter és Miklós. Mindketten ugyanoda, A4 gyakorlatra szeretnének eljutni. A villamosok egymás után érkeznek átlagosan 80 ember ül rajtuk és tipikusan 2 perc telik el két villamos érkezése között. A villamossal nagyon sok ember is utazhat, azonban minden tizedik villamoson utazik csak több mint 100 ember. A hallgatók szeretnének kényelmesen utazni, ezért csak akkor szállnak fel, ha legfeljebb 60 ember ül a villamoson.

    (a) Ha egyszerre szállnak fel, hányadik villamossal tudnak elmenni? Átlagosan hány perc alatt érnek be az egyetemre? (tegyük fel, hogy az utazás fix 15 perc hosszúságú)

    (b) Néha, az első olyan villamoson, amire fel tudnának szállni, megtippelik körülbelül hányan lehetnek. Egészen pontosan: Miklós azt állítja, hogy nem lesz több mint 40 ember rajta, Péter pedig azt, hogy több mint 50 ember lesz rajta. Mi a valószínűbb, ki fog előbb elutazni?

    Megoldás: Feltehető, hogy a villamoson ülők száma (X) – közelítőleg – normális eloszlást követ 80 ember várható értékkel és σ szórással, ahol

    $$0.1 = \mathbb{P}(X > 100) = 1 - \mathbb{P}(X < 100) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-80}{\sigma} < \frac{20}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)$$

    amiből $0.9 = \Phi(20/\sigma)$, így $\sigma = 15.625$.

    (a) A siker valószínűsége: $\mathbb{P}(X < 60)$ – a várható értékre (80) való – szimmetria miatt éppen $\mathbb{P}(X > 100)$, ami 0.1. Az első villamosra – amivel el tudnak menni – való várakozási idő geometriai eloszlású $p = 0.1$ paraméterrel. Tehát várhatóan $\frac{1}{p} = 10$ villamost kell várni ahhoz, hogy végre el tudjanak menni. Mivel átlagosan 2 perc telik el két villamos érkezése között ezért átlagosan $10 \times 2 + 15 = 35$ perc alatt érnek be.

    (b) Miklós esélye:

    $$\mathbb{P}(X < 40 \,|\, X < 60) = \frac{\mathbb{P}(X < 40, X < 60)}{\mathbb{P}(X < 60)} = \frac{\mathbb{P}(X < 40)}{0.1} = 10\Phi\left(\frac{-40}{15.625}\right) = 10(1 - \Phi(2.56) \approx 0.052$$

    Péter esélye:

    $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 50 \,|\, X < 60) &= \frac{\mathbb{P}(50 < X, X < 60)}{\mathbb{P}(X < 60)} = \frac{\mathbb{P}(X < 60) - \mathbb{P}(X < 50)}{0.1} = \\ &= 10\left(0.1 - \Phi\left(\frac{-30}{15.625}\right)\right) = 10(\Phi(1.92) - 0.9) \approx 0.726\end{aligned}$$

    Azaz jóval valószínűbb, hogy Péter fog előbb felszállni!

19. Magyar autópályákon a sebességkorlátozás: 130 km/h. Az elszaporodott balesetek miatt a sebességtúllépés fokozottan büntetett: a fizetendő büntetés ezer forintban túllépett kilometeróránként lineárisan növekszik (azaz 10 km/h túllépés esetén 10 ezer forintot kell fizetni). Ezért a szabálysértések száma jelentősen megcsappant, azonban így is azt tapasztalják, hogy havi átlag 12 autós túllépi a sebességhatárt. Tegyük fel, hogy az autósok sebessége átlag 120 km/h, 15 km/h szórással.

(a) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott autós túllépi a sebességhatárt?

(b) 7 véletlenül választott autósból mi a valószínűsége, hogy pontosan ketten lépik túl a sebességhatárt?

(c) 100 autóstól átlag mennyi büntetést szednek be?

(d) Átlag mennyi bevételt könyvelhet el hónap végén a rendőrség?

Megoldás: Az autósok sebessége közelíthető normális eloszlással, aminek – a feladat szövege alapján – a várható értéke 120, szórása 15 (km/h). Ebből

(a) $\mathbb{P}(X > 130) = 1 - \mathbb{P}(X < 130) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-120}{15} < \frac{2}{3}\right) = 1 - \Phi(2/3) \approx 0.25.$

(b) 7 (vagy akárhány) autósból azoknak az autósoknak a száma, akik túllépik a sebességhatárt binomiális eloszlású $p = 0.25$ paraméterrel, tehát:

$$\mathbb{P}(\text{7-ből pontosan 2-en lépik túl}) = \binom{7}{2} p^2 (1-p)^5 \approx 0.31$$

(c) Legyen

$$Y = \begin{cases} X - 130, & \text{ha } X \geq 130; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Y a fizetendő büntetés véletlen nagysága (ezer forintban). Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y &= \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} \int_{x=130}^{+\infty} (x-130) \exp\left(-\frac{(x-120)^2}{2\times 15^2}\right) \mathrm{d}x = \\
&= \frac{15}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=130}^{+\infty} \frac{x-120}{15^2} \exp\left(-\frac{(x-120)^2}{2\times 15^2}\right) \mathrm{d}x - 10 \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} \int_{x=130}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-120)^2}{2\times 15^2}\right) \mathrm{d}x = \\
&= \frac{15}{\sqrt{2\pi}} \left[-\exp\left(-\frac{(x-120)^2}{2\times 15^2}\right)\right]_{x=130}^{+\infty} - 10\left(\Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{130-120}{15}\right)\right) = \\
&= \frac{15}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{2}{9}\right) - 10\left(1 - \Phi\left(\frac{2}{3}\right)\right) \approx 2.2668,
\end{aligned}$$

ahol az $y := (x-120)/15 \; \mathrm{d}y = \mathrm{d}x/15$ integrál-transzformációt használtuk.
Azaz 100 autóstól átlag $100 \times 2.2668 \approx 226680$ forintot hajtanak be.

(d) Egy hónapban átlag 12-en lépik túl a sebességhatárt, tehát tőlük átlag $12 \times 2.2668 \approx 27202$ forintot hajtanak be.

20. Válaszoljuk meg az előbbi feladat kérdéseit akkor is, ha a fizetendő büntetés kvadratikusan nő kilométeróránként? (azaz 10 km/h túllépés 100 ezer forint bírságot von maga után)

Megoldás: Az előbbi feladat jelöléseit követjük, az első két részre ugyanaz a válasz, a (c), (d) részeknél van csak változás, ezek a következőek lesznek. Most

$$Y = \begin{cases} (X - 130)^2, & \text{ha } X \geq 130; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

jelöli a büntetés nagyságát (ezer forintban). Ezzel

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y &= \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} \int_{x=130}^{+\infty} (x-130)^2 \exp\left(-\frac{(x-120)^2}{2\times 15^2}\right) \mathrm{d}x = \\
&= \frac{15}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=130}^{+\infty} (x-120)\frac{x-120}{15^2} \exp\left(-\frac{(x-120)^2}{2\times 15^2}\right) \mathrm{d}x - 20\frac{15}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=130}^{+\infty} \frac{x-120}{15^2} \exp\left(-\frac{(x-120)^2}{2\times 15^2}\right) \mathrm{d}x + \\
&+ 10^2 \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} \int_{x=130}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-120)^2}{2\times 15^2}\right) \mathrm{d}x = \\
&= \frac{15}{\sqrt{2\pi}} \left[-(x-120)\exp\left(-\frac{(x-120)^2}{2\times 15^2}\right)\right]_{x=130}^{+\infty} + (15^2 + 10^2)\frac{1}{15\sqrt{2\pi}} \int_{x=130}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-120)^2}{2\times 15^2}\right) \mathrm{d}x - \\
&- 20\frac{15}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=130}^{+\infty} \frac{x-120}{15^2} \exp\left(-\frac{(x-120)^2}{2\times 15^2}\right) \mathrm{d}x = \\
&= \frac{15\times 10}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{2}{9}\right) + 325\left(1 - \Phi\left(\frac{2}{3}\right)\right) - 20\frac{15}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{2}{9}\right) = 325\left(1 - \Phi\left(\frac{2}{3}\right)\right) - \frac{150}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{2}{9}\right) \approx 34.1429,
\end{aligned}$$

ahol a 4. egyenlőségben parciálisan integráltunk majd felhasználtuk az előző feladat (rész)eredményeit is.
Azaz 100 autóstól átlag $100 \times 34.1429 \approx 3414290$ forintot hajtanak be.
Végül: egy hónapban átlag 12-en lépik túl a sebességhatárt, tehát tőlük átlag $12 \times 34.1429 \approx 409714$ forintot hajtanak be.

21. Nemcsak az autópályákon de a közutakon is nagyon sok a sebességtúllépés. A rendőrök általában egy hídról fényképezik le a gyanús autókat, melyek sebessége normális eloszlású 84 km/h várható értékkel, 5 km/h szórással. Ha a sebességhatár 90 km/h, 200 autósból várhatóan hány fogja túllépni a sebességhatárt? Egy átlagos nap a rendőrök 40 autóst fogtak meg. Hány autóst kellett ehhez lefényképezniük?

Megoldás: Jelölje X egy véletlen autós sebességét, ami tehát 84 várható értékű és 5 szórású normális (km/h-ban). A sebességkorlátozás 90 km/h, tehát annak a valószínűsége, hogy egy autós ezt túllépi:

$$\mathbb{P}(X > 90) = 1 - \mathbb{P}(X < 90) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-84}{5} < 1.2\right) = 1 - \Phi(1.2) \approx 0.885.$$

Egy autós tehát 0.885 eséllyel lépi túl a sebességhatárt, tehát 200 autósból várhatóan $200 \times 0.885 = 177$ fogja túllépni. Avagy, azoknak az autósoknak a száma, akik túllépik a sebességhatárt binomiális eloszlású, itt $n = 200$, $p = 0.885$ paraméterrel, ennek a várható értéke pedig np.
Ahhoz, hogy egy átlagos nap 40 autóst megfogjanak, körülbelül $n = \frac{40}{0.885} \approx 45.2$-ször kellett fényképezniük.

22. Felhajtunk az autópályára, az előbbi feladatok alapján tudjuk, hogy a sebességkorlátozás 130 km/h. A kezdősebességünk 100 km/h, majd rálépünk a gázra, azaz választunk egy véletlen gyorsulást 200 km/h^2 várható értékkel és 30 km/h^2 szórással. Feltéve, hogy gyorsulásunk nem haladta meg az 210 km/h^2-et, mekkora valószínűséggel vagyunk még határon belül 10 perc elteltével? Hány perc elteltével lépjünk le a gázról ha azt szeretnénk, hogy akkor 95% biztonsággal ne fényképezzenek le? (negatív gyorsulás jelentse azt, hogy valami hiba miatt félre kellett állnunk)

Megoldás: Jelölje X a véletlen gyorsulásunkat (km/h^2-ben), mely normális eloszlású; várható értéke 200, szórása 30. A feladat szövege alapján t idő elteltével (t-t mérjük órákban) a sebességünk: $100 + Xt$ (km/h). tehát:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(100 + \frac{1}{6}X < 130 \,|\, X < 210) &= \frac{\mathbb{P}(X < 180, X < 210)}{\mathbb{P}(X < 210)} = \frac{\mathbb{P}(X < 180)}{\mathbb{P}(X < 210)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(\frac{X-200}{30} < \frac{-2}{3}\right)}{\mathbb{P}\left(\frac{X-200}{30} < \frac{1}{3}\right)} = \frac{1 - \Phi\left(\frac{2}{3}\right)}{\Phi\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 0.4.\end{aligned}$$

Végül legyen t az az idő (órában), amikor le kell lépjünk a gázról annak érdekében, hogy még 95%-os eséllyel határon belül autózzunk, azaz t-re a következő összefüggés kell, hogy fennálljon:

$$0.95 \quad = \quad \mathbb{P}(100 + Xt < 130) = \mathbb{P}\left(\frac{X-200}{30} < \frac{1}{t} - \frac{20}{3}\right),$$

ezt táblázatból visszakeresve kapjuk, hogy $\frac{1}{t} - \frac{20}{3} = 1.65$, vagyis $t = 0.12024$ (h), ami körülbelül 7.21 perc.

23. Egy feleletválasztós felvételi teszt 200 kérdést tartalmaz: minden kérdésnél 4 opció van, melyekből pontosan egy helyes. Azokat veszik fel, akik legalább 50 kérdésre helyesen válaszolnak. Tegyük fel, hogy Véletlen Viktor véletlenül betévedt a felvételire és minden kérdésnél véletlenül (egyenlő valószínűséggel) megjelöl egy választ. Mi a valószínűsége, hogy felveszik?

Megoldás: Ez egy CHT's feladat: legyen X_i Bernoulli valószínűségi változó, amely 1 ha Viktor i. kérdésre adott válasza helyes (ennek valószínűsége 1/4); és 0 különben (ennek az esélye 3/4). Az X_i változók függetlenek és azonos eloszlásúak, összegük éppen Viktor eltalált válaszainak a számát adja, ami binomiális eloszlású, de mi most a – standardizált – összeget normális eloszlással közelítjük. Akkor megy át, ha legalább 50 kérdésre helyesen válaszol ennek a valószínűsége:

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \cdots X_{200} \geq 50) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots X_{200} - 200\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{200}} \geq 0\right) \approx 1 - \Phi(0) = 0.5,$$

mert $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{4}$ és $\mathbb{SD}(X_i) = \sqrt{\mathbb{E}(X_i^2) - (\mathbb{E}X_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

24. Tőzsdén a következő feltételeket (is) tehetjük egy részvény áralakulására vonatkozóan: ha most kezdünk el kereskedni egy adott részvénnyel, melynek ára s_0, akkor ennek t idő múlva $s_t = (1 + r)s_0$-ra változik az ára, ahol r normális eloszlású (ez a ráta), 0 várhatóértékkel és t szórásnégyzettel (az időt mérjük években és legyen $t \leq 1$). Elkezdünk kereskedni ezzel a részvénnyel $S_0 = 10000$ Ft kezdőtőkével, hogyan változik időben a tőkénk, milyen modellt írna fel S_t-re? Mi az eloszlása S_t-nek? *Segítség: tegyük fel, hogy minden t/n hosszúságú részintervallumban (n nagy) r/n eloszlású a ráta növekedése/csökkenése és az egyes részintervallumokban ez egymástól függetlenül változik, valamint kamatos kamattal számolunk, azaz:*

$$\mathrm{S_t} \approx \mathrm{S_0}\left(1 + \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}}$$

Megoldás: A segítségben tulajdonképpen már minden le van írva, az utolsó képletben ha elvégzünk egy $n \to +\infty$ határátmenetet, akkor azt kapjuk, hogy $S_t = S_0 \exp(r)$, ahol r $(0, \sqrt{t})$ paraméterű normális eloszlású, és $S_0 = 10000$, azaz $S_t = \exp(4\log(10) + r)$, így S_t – természetes alapú – logaritmusa normális eloszlású $(4\log(10), \sqrt{t})$ paraméterrel, vagyis S_t log-normális eloszlású ugyanezzel a paraméterpárral.

25. Hogyan generálna le (μ, σ) paraméterű normális eloszlást követő véletlen valós számokat a RAND() (VÉL()) függvénnyel?

Megoldás: Ha U egyenletes eloszlású a $(0, 1)$-en, akkor $\Phi^{-1}(U)$ standard normális, hiszen:

$$\mathbb{P}(\Phi^{-1}(U) < x) = \mathbb{P}(U < \Phi(x)) = \Phi(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ebből $\sigma\Phi^{-1}(U) + \mu$ transzformációval tudunk (μ, σ) paraméterű normális véletlen számot gyártani ($\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$). Vesd össze ezt a feladatot a 9. feladatsor utolsó (18.) feladatával.