Villamosmérnök A4

8. gyakorlat (2012. 11. 05-06.)

Kétdimenziós valószínűségi változók, vetület- és feltételes eloszlások

Együttes eloszlásfüggvény: Az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó (együttes) eloszlásfüggvénye: $F(x, y) := \mathbb{P}(X < x, Y < y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$; tulajdonságai:

(a) $0 \leq F(x, y) \leq 1$ $(x, y \in \mathbb{R})$ és minden változójában: balról folytonos, monoton nem-csökkenő;

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x, y) = 0$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty,\ y\to+\infty} F(x, y) = 1$.

Együttes sűrűségfüggvény: $f(x, y) := \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$, amennyiben ez utóbbi létezik. Ennek tulajdonságai:

(a) $0 \leq f(x, y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$;

(b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$.

Valószínűség az együttes sűrűségfüggvényből: legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ egy tetszőleges tartomány, ekkor:

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \iint\limits_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Vetület (marginális) eloszlás- illetve sűrűségfüggvények: $F_X(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} F(x, y)$, $F_Y(y) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x, y)$, illetve sűrűségfüggvényeik: $f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}$, $f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y}$. Ezen utóbbiak nem feltétlenül léteznek, de amennyiben van együttes sűrűségfüggvény, akkor igen, és:

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y, \quad f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Feltételes eloszlás- és sűrűségfüggvény: akkor definiált ha léteznek a marginális sűrűségfüggvények, ekkor: $F_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X < x \,|\, Y = y) = \frac{1}{f_Y(y)}\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$, $F_{Y|X}(y|x) = \mathbb{P}(Y < y \,|\, X = x) = \frac{1}{f_X(x)}\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$. Ha létezik együttes sűrűségfüggvény, akkor a feltételes sűrűségfüggvények rendre:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{\partial F_{X|Y}(x|y)}{\partial x} = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \quad f_{Y|X}(y|x) = \frac{\partial F_{Y|X}(y|x)}{\partial y} = \frac{f(x, y)}{f_X(x)},$$

feltéve, hogy $f_X, f_Y > 0$.
Azt mondjuk, hogy a **marginálisok (X és Y) függetlenek**, ha $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$. Ugyanez sűrűségfüggvényekkel: $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$.
Folytonos Bayes-formula:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)\mathrm{d}y}$$

Diszkrét kétdimenziós eloszlások

1. Egy urnában van 7 piros, 6 kék és 5 zöld golyó. Kihúzunk visszatevés nélkül hármat. Legyen X a kihúzottak közül a pirosak száma, Y pedig a kékeké. Adjuk meg (X, Y) együttes eloszlását, és a peremeloszlásokat!

2. Először egy (szabályos) kockával dobunk, majd annyi (igazságos) érmével, ahányast a kockával dobtunk. Mi a valószínűsége, hogy a kockával 4-est dobunk és az érmékkel 2 fejet kapunk? Mi a valószínűsége, hogy 5 fejet kapunk? Adjuk meg az együttes és feltételes eloszlásokat is!

3. Két kockával dobva, mi a dobott számok

   (a) összegének és különbségének;

   (b) minimumának és maximumának;

   (c) összegének és különbség négyzetének;

   (d) maximumának, illetve összegének;

   az együttes eloszlása? Függetlenek-e a marginálisok egymástól? Ha nem, számítsuk ki a $\mathbb{P}(X = n, Y = m) - \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = m)$, illetve $\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$ értékét, ahol (X, Y) jelöli a részfeladatoknak megfelelő valószínűségi változó párt.

4. Kockával dobva az első, illetve második páros dobáshoz szükséges időt jelölje X_1 illetve X_2. Mi az eloszlása (X_1, X_2) párnak? Adjuk meg a feltételes eloszlásokat is!

5. A hamis érme p valószínűséggel mutat fejet, $1-p$ valószínűséggel írást ($p \neq \frac{1}{2}$). Ezt az érmét feldobjuk tízszer és felírjuk hányszor dobtunk fejet. Majd ezt a kísérletet – előbbitől függetlenül – megismételjük. Feltéve, hogy összesen 7 fejet dobtunk, mi az eloszlása az első kísérletben dobott fejek számának?

6. Egy drogériába érkező emberek 60%-a nő. Egy adott órában átlagosan 10 ember jár a drogériában. Feltéve, hogy 10 nő lépett be az utóbbi egy órában, mi annak a valószínűsége, hogy még 3 férfi járt ott?

7. Kockával dobunk addig, amíg nem páros szám jön! Ehhez szükséges dobások számát jelölje N és legyen X az első nem páros dobás értéke. Mi az eloszlása X-nek, illetve N-nek? Független-e X N-től? Adjuk meg az együttes eloszlásukat is!

Folytonos kétdimenziós eloszlások

8. Lehet-e egy (X, Y) pár eloszlásfüggvénye az alábbi függvények közül valamelyik? Ha igen, adjuk meg az együttes-vetület- és feltételes sűrűségfüggvényeket is (amennyiben léteznek)!

   (a)
$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - \exp(-x) - \exp(-y) + \exp(-(x+y)), & \text{ha } 0 < x, y; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   (b)
$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - \exp(-x) - \exp(-y) - x\exp(-x) + (1+x)\exp(-(x+y)), & \text{ha } 0 < x, y; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   (c)
$$F(x,y) = F(y,x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 1 \le x;\ 1 \le y \le x; \\ y(1 - y + \min(x,1)), & \text{ha } 0 \le x;\ 0 \le y \le \min(x,1); \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

9. Lehet-e egy (X, Y) pár együttes sűrűségfüggvénye az alábbi függvények közül valamelyik? Ha igen, adjuk meg a marginális- és feltételes sűrűségfüggvényeket is! Független-e X Y-tól?

   (a)
$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & \text{ha } 0 \le x, y; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   (b)
$$f(x,y) = \begin{cases} 2x + 2y, & \text{ha } 0 < x < 1;\ 0 < y < 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   (c)
$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, & \text{ha } 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1 \text{ és } 0 \le x + y \le 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

10. Lőjük be a $C > 0$ konstans értékét úgy, hogy az alábbiak sűrűségfüggvények legyenek:

   (a)
$$f(x,y) = \begin{cases} Cxy(1-x), & \text{ha } 0 < x < 1;\ 0 < y < 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   (b)
$$f(x,y) = \begin{cases} C(y^2 - x^2)\exp(-y), & \text{ha } 0 < y < +\infty;\ -y < x < y; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   Legyen (X, Y) pár együttes sűrűségfüggvénye f. Független-e X Y-tól? Számítsuk ki $\mathbb{E}(XY)$, $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$, $\mathbb{V}\text{ar}(X)$ és $\mathbb{V}\text{ar}(Y)$ értékét!

11. Legyen az (X, Y) pár egyenletes a $(0,0)$ középpontú 2 hosszúságú négyzetben. Mi az eloszlása X-nek, Y-nak? Függetlenek-e? Adjuk meg a $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \le 1)$ értékét!

12. Egy körbe szabályos hatszöget rajzolunk. Mi a valószínűsége, hogy a körben egyenletesen választott pont a hatszögben is benne van?

13. Egy véletlen téglalapot úgy szerkesztünk meg, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy a téglalap kerülete nagyobb 2 hosszegységnél, és a területe kisebb 1/4 területegységnél?

14. Két, egymástól független, véletlen számot generálunk a $(0,1)$ intervallumból. Mi a valószínűsége annak, hogy a két szám távolsága kisebb, mint a kisebbik szám? A két szám három darabra vágja a $[0,1]$ intervallumot. Mi a valószínűsége annak, hogy a három részintervallumból háromszöget lehet szerkeszteni?

15. Egy mentőautó folyamatosan szállít sérületek két, 10 km-re található város között. Minden időpillanatban a mentőkocsi pozíciója egyenletes eloszlású a két város között. Egyszercsak egy baleset történik valahol a két város között. A baleset helye szintén egyenletes eloszlású, de független a mentőkocsi pozíciójától. Mi annak a valószínűsége, hogy a baleset helytől legfeljebb 1 km-re található a mentőkocsi?

16. X_1, X_2, X_3 három egyenletes eloszlású véletlen pontot jelöl a $[0,3]$ intervallumból. Mi annak a valószínűsége, hogy az X_2 pont X_1 és X_3 között helyezkedik el?

17. Legyen X, Y két független, egyenletes eloszlású pont a $(0,1)$-ben. Mi az eloszlása $U = X + Y$-nak és $V = X - Y$-nak? Mi az (U, V) pár eloszlása? Független-e U V-től?

18. 4 véletlen számot generáltunk a $[0,1]$ intervallumból, majd rendeztük őket. Mi a rendezett számok együttes sűrűségfüggvénye? Mi a második és negyedik legnagyobb szám együttes eloszlása? Adjuk meg a marginális sűrűségfüggvényeket, hogyan neveztük az egydimenziós vetület eloszlásokat? Feltéve, hogy a második legnagyobb szám legalább 0.5, mi az eloszlása a legnagyobb számnak?

19. Egy kisiskolában három egymás mellett ülő, különösen virgonc gyerek a kicsöngetést követően felpattant a helyéről és kiszaladt az osztályteremből a 20 méterre található büfébe. A négy gyerek véletlen sebessége: U_1, U_2, illetve U_3 m/s, melyek független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók $[0,4]$-en. Az osztályfőnök – látva a rendetlenséget – 5 másodperc után rájuk szólt, mire a gyerekek azon nyomban megálltak. Mi az első, második, illetve utolsó gyerek pozíciójának a sűrűségfüggvénye? Mi az első és második, illetve második és harmadik gyerek pozíciójának együttes sűrűségfüggvénye? Mi az első és utolsó gyerek pozíciójának együttes sűrűségfüggvénye? Mi az utolsó két gyerek által megtett összes út eloszlása? Mennyi a gyerekek által megtett összes út várható értéke?

20. Egy gyárban 5 gép üzemel egy gyártási sor mentén. Ezek bármelyike idővel elromolhat, de – költségkímélés miatt – csak akkor állítják le őket és nyúlnak hozzájuk, ha már legalább 3 gép nem üzemel, ugyanis legfeljebb 2 kiesett gépet még a maradék tud helyettesíteni. A gépek üzemelési ideje egymástól független, exponenciális eloszlású, mindannyiszor 1000 óra várható értékkel. Mi az eloszlása az első elromló gép működési idejének? És a másodiknak? Mi a sűrűségfüggvénye az első két elromló gép összes működési idejének? Mennyi annak az időnek az eloszlása, amíg nem kell leállítani őket, azaz míg legalább 3 üzemel? Várhatóan hány óra múlva kell hozzájuk nyúlni?

21. Erika és Ervin randit beszélnek meg este hat órára. Mindketten elég késősek: késett perceiknek száma egymástól független, egyenletes eloszlású, legfeljebb azonban 30 percet késnek. Bármikor is érkeznek meg egy véletlen exponenciális időt várnak a másikra 10 perc várható értékkel. Mi annak a valószínűsége, hogy összejön a randi?

22. Erika és Ervin még mindig randizni szeretnének, meg is beszélnek egy találkát újfent este hat órára. Erika azonban valamiért nagyon késős típus, késett perceinek száma egyenletes eloszlású, legfeljebb azonban 50 percet késik. Ervin, Erikától függetlenül, legfeljebb 10 percet késik, szintén egyenletesen. Bármikor is érkezik meg Ervin, roppant kitartó, ezért az ő véletlen várakozási ideje 20 perc várható értékű, míg Erika – ahogy jött úgy megy is – várhatóan csak 3 percet marad (mindkettőjüknek exponenciális óra van a zsebében). Mi az esélye annak, hogy összejön az áhított találka?

23. Béla és Jóska is munkanapokon busszal jár dolgozni. A két járat – melyre Bélának, illetve Jóskának kell szállnia – egymástól függetlenül jár. Béla esetében átlagosan 2 percet kell várni, míg Jóska általában 3 percet vár a busz érkezésére. A furcsa csillagállásoknak is köszönhetően ők mindig egyszerre érkeznek meg reggel a buszmegállóba. Mi az esélye, hogy Jóska előbb száll fel a buszra, mint Béla? Mi a valószínűsége annak, hogy ugyanannyit vártak a buszra? A két barát hétvégente is szokott buszozni, akkor azonban Béla 10 percet, míg Jóska csak 5 percet vár átlagosan. Béla és Jóska is a hét összes napján szokott utazni. Mi az esély arra, hogy egy tetszőleges napon Béla kevesebbet vár a buszra, mint Jóska?

24. Egy telefonközpontba véletlen időközönként érkeznek be a hívások. Azt tapasztalják, hogy az operátorok egy órán belül átlagosan 12 hívást regisztrálnak. Ha tudjuk, hogy fél órán belül 4 hívást kaptak be, mi az eloszlása az első bejövő hívásnak? És a másodiknak? Adjuk meg az eloszlás- és sűrűségfüggvényt is! Mi az együttes sűrűségfüggvénye a harmadik és negyedik bejövő hívás időpontjának?

25. Egy A4-et hallgató villamosmérnök hallgató szeretné megoldani az összes kiadott házi feladatot, azaz mind a hatot. Akármelyik is kerül elsőként a kezébe azt (egy véletlen) Z_1 idő alatt oldja meg. Azonban, ahogy időben halad előre a következő feladatra már csak $\sqrt{Z_2}$ idő kell, a harmadikra $\sqrt[3]{Z_3}$, végül $\sqrt[6]{Z_6}$ idő alatt oldja meg az utolsó feladatot, ahol $Z_1, Z_2, \ldots, Z_6$ független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, 1 várható értékkel. Mi az együttes eloszlása a második és harmadik feladat megoldásához kellő időnek? Mennyi az első két feladat megoldásához szükséges összes idő eloszlása? Adjuk meg a sűrűségfüggvényt! Várhatóan hány perc múlva fog végezni az első két feladattal? Tudjuk, hogy 25 perc alatt oldotta meg az első két feladatot, mi az elsőként megoldott feladat eloszlása?
Megjegyzés: $\sqrt[i]{Z_i}$ *úgynevezett öregedő (Weibull) eloszlású, azaz minél többet gondolkodik, annál kevesebb idő kell már ahhoz, hogy megoldja az adott feladatot.*

26. Egy általános biztosítási cégnél minden biztosítottnak van úgynevezett baleseti paramétere, ez legyen $\lambda > 0$. Egy évben egy ilyen egyén baleseteinek száma λ várható értékű Poisson eloszlást követ. A cégnél azt a feltevést teszik meg, hogy egy újonnan belépett egyén baleseti paramétere gamma eloszlású (k, α) paraméterrel. Ha ennek az újonnan biztosított egyénnek 5 balesete volt az első évben, mi a feltételes sűrűsége a baleseti paraméterének? Határozzuk meg az első éves baleseteinek várható számát!