Villamosmérnök A4

9. gyakorlat (2012. 11. 12-13.)

Kétdimenziós normális eloszlás, várható érték és szórás tulajdonságai

Egy kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó függvényének várható értéke, sűrűségfüggvénnyel kifejezve:

$$\mathbb{E}(t(X,Y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} t(x,y) f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

ahol $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Kovariancia: $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)\right] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$; és a **kovariancia mátrix** (kétdimenziós eset):

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) \end{pmatrix}$$

Korrelációs együttható: $\mathrm{r}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbb{SD}(X)\mathbb{SD}(Y)}$.

Kétdimenziós normális eloszlás
Standard kétdimenziós normális eloszlású egy (U, V) pár, ha sűrűségfüggvénye

$$\varphi(u,v) := \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{u^2+v^2}{2}\right) \quad (u, v \in \mathbb{R}).$$

(U, V) zérus várható érték vektorú, egységmátrix kovarianciájú pár. Azt mondjuk, hogy az $(X, Y) = (U, V)\mathbf{A} + \mu$ pár kétdimenziós normális eloszlású $\mu \in \mathbb{R}^2$ várható érték vektorral és $\Sigma \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ (invertálható) kovariancia mátrixszal, ha (U, V) standard normális pár, és $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \Sigma$, ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
Egy kétdimenziós normális (X, Y) pár sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2r\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right\},$$

ahol $\mathbb{E}X = \mu_X$, $\mathbb{E}Y = \mu_Y$, $\mathbb{SD}(X) = \sigma_X$, $\mathbb{SD}(Y) = \sigma_Y$, és $r = r(X,Y)$ X és Y korrelációs egyyütthatója. Kétdimenziós normális eloszlás esetében a perem- illetve feltételes eloszlások is normálisok.

1. Határozzuk meg az alábbi mennyiségeket:
   (a) $\mathrm{r}(X,Y)$, $\mathbb{SD}(X+Y)$, $\mathbb{SD}(2X-3Y)$;
   (b) $\mathbb{E}(X-3Y)^2$, $\mathbb{E}(XY+Y^2)$;

   feltéve, hogy $\mathrm{Cov}(X,Y) = 2$, $\mathbb{SD}(X) = 3$, $\mathbb{SD}(Y) = 4$, $\mathbb{E}X = -1$, $\mathbb{E}Y = 1$.

2. Két kockával dobva, mi a dobott számok
   (a) összegének és különbségének
   (b) minimumának és maximumának;
   (c) összegének és különbség négyzetének;

   kovarianciája? Számítsuk ki a perem várható értékeket és szórásokat is!

3. Legyenek X_1, X_2, X_3, X_4 páronként korrelálatlan valószínűségi változók, melyek közös szórása 1. Számoljuk ki a következő párok korrelációs együtthatóit:
   (a) $X_1 + X_2$ és $X_2 + X_3$;
   (b) $X_1 + X_2$ és $X_3 + X_4$

4. Szabályos kockával dobunk tízszer, majd felírjuk hányszor dobtunk 6-ot, ezt jelölje X, illetve hányszor dobtunk 1-et, ezt meg Y jelöli. Mi (X, Y) kovariancája, korrelációs együtthatója?

5. Legyenek X és Y független valoszínűségi változók közös μ várható értékkel, de különböző σ_X és σ_Y szórásokkal. μ értékét nem tudjuk, de egy mintavétel alapján az X és Y súlyozott átlagával szeretnénk megbecsülni. Azaz: μ értékére a $\lambda X + (1-\lambda)Y$ becslést adjuk, valamilyen $0 < \lambda < 1$ parameterrel. Hogyan válasszuk λ-t, hogy a becslésünk szórása minimális legyen?

6. Egy kaszinóban a következő játékot játszák: két játékos (egymástól függetlenül) gondol egy nemnegatív 1-nél kisebb véletlen számra. Ezt követően, Tőlük függetlenül, a Bank is gondol egy ilyen véletlen számra, majd az a játékos nyer, akinek a száma nagyobb volt a Bank számánál. Legyen X és Y az egyes játékosok nyerésének Bernoulli valószínűségi változója. Mi (X, Y) kovarianciája, korrelációs együtthatója? Értelmezze a kapott eredményt!

7. Egy kisváros durván négyzet alakú, a négyzet oldalai 3 kilométer hosszúak. A város $(0, 0)$ középpontjában van a kórház, és a város utcái négyzetháló szerűek. Ezért, ha a város (x, y) pontján történik egy baleset, a mentőnek $|x| + |y|$ távolságot kell megtennie a balesettől a kórházig. Ha egy baleset a városon belül egyenletes eloszlású helyen következik be, számoljuk ki a betegszállítás várható hosszát! Hogyan változik az eredmény, ha a távolság négyzetével arányos hosszú utat kell megtennie a mentőnek?

8. Legyen U egyenletes eloszlású véletlen szám a $(-1, 1)$ intervallomból. Mi a várható értéke a $\sqrt{U}$, U^2, illetve U^3 valószínűségi változónak?

9. Magyarországon egy ember egy véletlen $\sqrt{Z}$ ideig él, ahol Z exponenciális eloszlású valószínűségi változó valamilyen ismeretlen λ paraméterrel. Mi λ értéke, ha átlagosan 67 évig élünk?

10. Az (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye az alábbiak valamelyike:

    (a) $f(x,y) = \begin{cases} 60xy^2, & \text{ha } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$

    (b) $g(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{x}\exp(-2x), & \text{ha } 0 < x,\ 0 \le y \le x; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$

    (c) $h(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y}\exp(-y - x/y), & \text{ha } 0 < x, y; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$

    Határozzuk meg X, Y várható értékét, szórását illetve kovarianciájukat!

11. Egy gyárban két gép egymás mellett működik, de egyik üzemelése vagy épp nem üzemelése sem befolyásolja a másik működését vagy épp nem működését. Mindkettő exponenciális ideig él, és az esetek 90%-ában több, mint 1000 órát üzemelnek.

    (a) Várhatóan meddig lesz üzemképes mindkét gép?

    (b) Várhatóan meddig fog üzemelni legalább az egyik gép?

    (c) A két gép együttesen átlagosan hány órát üzemel?

12. Határozzuk meg 6 egyenletesen véletlenül választott $(0, 1)$ szám közül a harmadik legkisebb várható értékét és szórását! Mi a második és negyedik legnagyobb szám kovarianciája, korrelációja?

13. Tegyük fel, hogy egy jólmenő étterem heti összbevétele normális eloszlást követ 1 millió forint várható haszonnal, és 700000 forint szórással. Mi annak a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 1.5 millió forint a bevétele két, egymást követő héten? Itt tegyünk még fel függetlenséget! Majd nézzük meg, hogyan változik annak a valószínűsége, hogy a második héten több mint 2 millió forint a bevétel feltéve, hogy az első héten 1.5 millió forint volt a bevétel és a korreláció -0.5! Mi a második hét várható bevétele ugyanezen feltétel mellett? Mennyi a két hét várható összbevétele? Mi a szórás?

14. Budapesten májusban az átlagos hőmérséklet $25\,^\circ$C, $7\,^\circ$C szórással, valamint az átlagnyomás 10^5 Pa, 2×10^4 Pa szórással. A hőmérséklet/nyomás változása szoros összhangban van, köztük lévő korreláció 0.7. Írjuk fel a kovariancia mátrixot majd határozzuk meg a következőket:

    (a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy nap melegebb lesz, mint $40\,^\circ$C? És, hogy alacsonyabb a nyomás 6×10^4 Pa-nál?

    (b) Egy nap $20\,^\circ$C-ot mértünk. Mi annak a valószínűsége, hogy a légnyomás 1.2×10^5 Pa fölött járt? Átlagosan mekkora volt a légnyomás? Mekkora a szórás?

    (c) Feltéve, hogy egy nap 10^5 Pa volt a légnyomás, mi annak a valószínűsége, hogy melegebb volt, mint $35\,^\circ$C? Átlagosan hány fok volt aznap? Mekkora a szórás?

15. Magyarországon a felnőtt férfiak testmagassága átlagosan 178 cm, 9 cm szórással, míg testsúlyuk 85 kg, 10 kg szórással. A korrelációs együttható 0.7, azaz minél magasabb valaki, annál súlyosabb is. Írjuk fel a kovariancia mátrixot!

    (a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy férfi magasabb 2 méternél? És, hogy nehezebb 100 kg-nál?

    (b) Feltéve, hogy egy férfi 190 cm, mi annak a valószínűsége, hogy könnyebb, mint 60 kg? Átlagosan mekkora súlyú egy ilyen férfi? Mekkora a szórás?

    (c) Feltéve, hogy egy férfi 80 kg, mi annak a valószínűsége, hogy magasabb, mint 180 cm? Várhatóan hány cm magas egy ilyen férfi? Mekkora a szórás?

16. Legyen a (X, Y) pár kétdimenziós normális eloszlású, r korrelációval. Mi az eloszlása $U = X + Y$-nak és $V = X - Y$-nak? Független-e U a V-től? Számoljuk ki a várható értékeket és szórásokat is!

17. Legyen U és Z független valószínűségi változók, előbbi egyenletes a $(0, 2\pi)$ intervallumban, utóbbi exponenciális, 1 várható értékkel. Mi az eloszlása az $X = \sqrt{2Z}\cos(U)$, illetve $Y = \sqrt{2Z}\sin(U)$ valószínűségi változónak? Független-e X Y-tól?

18. Hogyan generálna le kétdimenziós normális eloszlású véletlen pontokat a síkon, melyek várható értéke (μ_1, μ_2), szórása (σ_1, σ_2), korrelációs együtthatója pedig r. Függetlenek-e a koordináták, ha $r = 0$?