Villamosmérnök A4

1. gyakorlat (2012. 09. 03.)

Kombinatorika, kombinatorikus valószínűségek

1. A hat leszámlálási típus bemutatása, mind színes golyókkal:

   (a) **ismétlés nélküli permutáció** (sorba rendezés):
   10 különböző színű golyót hányféleképp állíthatunk sorba? (n-et?)

   $$n!$$

   (b) **ismétléses permutáció**:
   3 piros, 3 kék, 4 fehér golyót hányféleképp állíthatunk sorba? (n-et, amik közül $n_1, n_2, \ldots, n_k$ egyforma színű van?)

   $$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

   (c) **ismétlés nélküli variáció** (kiválasztás és sorba rendezés):
   10 különböző színű golyó közül hányféleképp választhatunk 3-at, ha számít a sorrendjük? (n golyó, k-t húzunk?)

   $$\frac{n!}{(n-k)!}$$

   (d) **ismétléses variáció**:
   10-féle színű golyó van, mindből kellően sok (legalább 3). Húzunk 3-at, számít a sorrend. Hányféle kimenetel lehet? (n-féle golyó, mindből legalább k, és k-t húzunk?)

   $$n^k$$

   (e) **ismétlés nélküli kombináció** (kiválasztás):
   10 különböző színű golyóból hányféleképp választhatunk ki 3-at, ha a sorrend nem számít? (n-ből k-t?)

   $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

   (f) **ismétléses kombináció**:
   10-féle sütemény van a cukrászdában, mindből jó sok. Mi 3 sütit szeretnénk hazavinni. Ez hányféleképp (t)ehető meg? (n-féle süti van, k darabot veszünk?)

   $$\binom{n+k-1}{k}$$

2. Hány különböző *sorrend*be állíthatóak az 1, 2,... n számok?

3. Hányféleképpen választhatunk ki az 1, 2,... n számok közül k-t, ha a *kiválasztás sorrend*je számít, és minden elemet csak egyszer választhatunk? Mi a helyzet akkor, ha egy elemet akárhányszor kiválaszthatunk?

4. Hányféleképpen választhatunk ki az 1, 2,... n számok közül k-t, ha a *kiválasztás* sorrendje nem számít és minden elemet csak egyszer választhatunk? Mi a helyzet akkor, ha egy elemet akárhányszor is kiválaszthatunk?

5. Hányféleképpen állíthatunk sorba k db egyest és $n-k$ db 0-t? Hány n hosszú 0 – 1-sorozat van összesen?

6. Egy n elemű halmaznak hány részhalmaza van?

7. Tíz urnába hányféleképpen helyezhető el 5 megkülönböztethetelen golyó? És 5 különböző?

8. Hány különböző (értelmes vagy értelmetlen) 9-betűs szó készíthető a MŰEGYETEM szó betűiből?

9. Mennyiféleképpen olvasható ki a MENNYIFÉLE az alábbi rajzból, ha a bal felső sarokból indulunk, és csak lefelé vagy jobbra léphetünk?

M	E	N	N	Y	I
E	N	N	Y	I	F
N	N	Y	I	F	É
N	Y	I	F	É	L
Y	I	F	É	L	E

10. Legalább hány lottószelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen 5-találatosunk?

11. Hány különböző autó-rendszám készíthető három betűből és három számjegyből? És 2 betű, 4 számjegyből? Hányszor több kocsi különböztethető meg az első módszerrel?

12. Három kockát dobunk fel egyszerre. Az azonos színű kockák megkülönböztethetetlenek. Hány különböző kimenetele lehet a kísérletnek, ha

(a) mindhárom kocka különböző színű;
(b) két kocka piros, a harmadik kék;
(c) a kockák azonos színűek?

13. Egy versenyen 23 versenyző indul. Hányféle sorrend alakulhat ki? Hányféle sorrend lehet a dobogón?

14. (Gyakran használt módszer: komplementer számolása): Hatszor dobunk egy kockával. Hány olyan dobássorozat lehet, amelyben dobtunk hatost?

15. Tegyük fel, hogy A és B két esemény, azonos valószínűségi mezőn értelmezve, és valószínűségeikre $\mathbb{P}(A) \geq 0.8$ és $\mathbb{P}(B) \geq 0.5$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0.3$!

16. Két kockával dobva mennyi annak a valószínűsége, hogy
    (a) két azonos számot dobunk?
    (b) két különböző számot dobunk?
    (c) a két dobás összege 7?

17. Egy 26-fős tankörben mi a valószínűsége, hogy legalább két ember egy napon ünnepli a születésnapját?

18. Egy pingpong-meccsen A és B két, azonos esélyekkel induló játékos. Mi a valószínűbb:
    (a) A 4 meccsből pontosan 3-at nyer meg, vagy
    (b) B 8 meccsből pont 5-öt nyer meg?

19. Egy kulcskarikán lóg n db kulcs. Pontosan 1 nyitja a zárat, de én nem tudom, melyik az. Úgy próbálkozom a zár kinyitásával, hogy mindig egyenletesen véletlenül választok a még ki nem próbált kulcsok közül, amíg csak ki nem nyílik a zár. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan a k-adik próbálkozásom jár először sikerrel?

20. Egy parkolóban 12 hely van egymás mellett sorban. 8 hely foglalt, de úgy, hogy a 4 fennmaradó hely pont egymás mellett van. Utal-e ez valamilyen különleges körülményre (pl. hogy egy baráti társaság egyszerre ment el)? Számoljuk ki az esemény valószínűséget, feltéve, hogy pont 4 hely szabad.

21. Szórjunk el a sakktáblán egyenletes valószínűséggel 8 bástyát. Mennyi a valószínűsége, hogy egyik sem üti a másikat?

22. Valaki az angol abc 26 betűjéből (melyek között 5 magánhangzó és 21 mássalhangzó van) véletlenszerűen kiválaszt 4 betűt (minden választásnál mind a 26 betűnek ugyanakkora az esélye), és leírja őket egymás mellé. Mi a valószínűsége annak, hogy se magánhangzók, se mássalhangzók nem kerülnek egymás mellé?

23. Mi a valószínűbb: 6 kockadobásból legalább egyszer hatost dobni, vagy 12 kockadobásból legalább kétszer hatost dobni?

24. Három kockával dobva, mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege 10-nél nagyobb?

25. Kitöltök és bedobok egy szelvényt az ötös lottón. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy pontosan 3 találatom lesz! Mennyi a valószínűségsége, hogy elveszítem a pénzem, amit a szelvényre költöttem?