Villamosmérnök A4

1. gyakorlat (2012. 09. 03.)

Kombinatorika, kombinatorikus valószínűségek

1. A hat leszámlálási típus bemutatása, mind színes golyókkal:

   (a) **ismétlés nélküli permutáció** (sorba rendezés):
   10 különböző színű golyót hányféleképp állíthatunk sorba? (n-et?)
   $$n!$$

   (b) **ismétléses permutáció**:
   3 piros, 3 kék, 4 fehér golyót hányféleképp állíthatunk sorba? (n-et, amik közül $n_1, n_2, \ldots, n_k$ egyforma színű van?)
   $$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

   (c) **ismétlés nélküli variáció** (kiválasztás és sorba rendezés):
   10 különböző színű golyó közül hányféleképp választhatunk 3-at, ha számít a sorrendjük? (n golyó, k-t húzunk?)
   $$\frac{n!}{(n-k)!}$$

   (d) **ismétléses variáció**:
   10-féle színű golyó van, mindből kellően sok (legalább 3). Húzunk 3-at, számít a sorrend. Hányféle kimenetel lehet? (n-féle golyó, mindből legalább k, és k-t húzunk?)
   $$n^k$$

   (e) **ismétlés nélküli kombináció** (kiválasztás):
   10 különböző színű golyóból hányféleképp választhatunk ki 3-at, ha a sorrend nem számít? (n-ből k-t?)
   $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

   (f) **ismétléses kombináció**:
   10-féle sütemény van a cukrászdában, mindből jó sok. Mi 3 sütit szeretnénk hazavinni. Ez hányféleképp (t)ehető meg? (n-féle süti van, k darabot veszünk?)
   $$\binom{n+k-1}{k}$$

2. Hány különböző *sorrend*be állíthatóak az 1, 2,… n számok? *Megoldás*: $n!$

3. Hányféleképpen választhatunk ki az 1, 2,… n számok közül k-t, ha a *kiválasztás sorrend*je számít, és minden elemet csak egyszer választhatunk? Mi a helyzet akkor, ha egy elemet akárhányszor kiválaszthatunk?
   Megoldás: Ha minden elemet csak egyszer választhatunk, akkor $\frac{n!}{(n-k)!}$, ha többször is, akkor n^k

4. Hányféleképpen választhatunk ki az 1, 2,… n számok közül k-t, ha a *kiválasztás* sorrendje nem számít és minden elemet csak egyszer választhatunk? Mi a helyzet akkor, ha egy elemet akárhányszor is kiválaszthatunk?
   Megoldás: Ha minden elemet csak egyszer választhatunk, akkor $\binom{n}{k}$, hogyha akárhányszor, akkor $\binom{n+k-1}{k}$.

5. Hányféleképpen állíthatunk sorba k db egyest és $n-k$ db 0-t? Hány n hosszú $0-1$-sorozat van összesen?
   Megoldás: $\binom{n}{k}$, illetve 2^n. Az alapján pedig, hogy az összes n-hosszú $0-1$ sorozatban 0 db, 1 db, 2db, ..., n db egyes lehet, értelmet nyer a binomiális tétel, miszerint
   $$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

6. Egy n elemű halmaznak hány részhalmaza van?

   Megoldás: 2^n. Indoklás: Minden elemről külön-külön el kell dönteni, benne van-e a részhalmazban, vagy nincs. Kódolhatjuk a részhalmazt úgy, hogy sorbatesszük az elemeket és amelyiket beválasztjuk a halmazba, az alá 1-est, amelyiket nem, az alá 0-t írunk. A részhalmazokat így egy-egyertelműen megfeleltetjük n-hosszú 0-1 sorozatoknak, azokból pedig összesen 2^n féle van.

7. Tíz urnába hányféleképpen helyezhető el 5 megkülönböztethetelen golyó? És 5 különböző?

   Megoldás: Ha az 5 golyó egyforma, akkor ez ugyanaz, mint a süteményes feladat, tehát a megoldás $\binom{14}{5}$. Ha pedig a golyók különbözőek, akkor mindegyik golyó egymástól függetlenül 10-féle helyre kerülhet, tehát a megoldás 10^5.

8. Hány különböző (értelmes vagy értelmetlen) 9-betűs szó készíthető a MŰEGYETEM szó betűiből?
   Megoldás: $\frac{9!}{2!3!}$

9. Mennyiféleképpen olvasható ki a MENNYIFÉLE az alábbi rajzból, ha a bal felső sarokból indulunk, és csak lefelé vagy jobbra léphetünk?

M	E	N	N	Y	I
E	N	N	Y	I	F
N	N	Y	I	F	É
N	Y	I	F	É	L
Y	I	F	É	L	E

Megoldás: 9-et kell mindenképp lépni, és ebből szabadon választhatjuk ki azt az 5 lépést, amit jobbra teszünk meg. A válasz tehát $\binom{9}{5}$.

10. Legalább hány lottószelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen 5-találatosunk? *Megoldás*: $\binom{90}{5}$

11. Hány különböző autó-rendszám készíthető három betűből és három számjegyből? És 2 betű, 4 számjegyből? Hányszor több kocsi különböztethető meg az első módszerrel?

Megoldás: $26^3 10^3$ illetve $26^2 10^4$. A hányados $2,6$.

12. Három kockát dobunk fel egyszerre. Az azonos színű kockák megkülönböztethetetlenek. Hány különböző kimenetele lehet a kísérletnek, ha

   (a) mindhárom kocka különböző színű; *Megoldás*: 6^3

   (b) két kocka piros, a harmadik kék; *Megoldás*: $\binom{6+2-1}{2}6 = 126$

   (c) a kockák azonos színűek? *Megoldás*: $\binom{6+3-1}{3}$

13. Egy versenyen 23 versenyző indul. Hányféle sorrend alakulhat ki? Hányféle sorrend lehet a dobogón?

Megoldás: 23!-féle teljes sorrend, a dobogón pedig $23 \cdot 22 \cdot 21 = \frac{23!}{20!}$ sorrend lehetséges.

14. (Gyakran használt módszer: komplementer számolása): Hatszor dobunk egy kockával. Hány olyan dobássorozat lehet, amelyben dobtunk hatost?

Megoldás: Összesen 6^6-féle lehet a dobássorozat, ezek közül 5^6 darab van, amikor egyetlen hatost sem dobunk. (Hiszen ekkor mind a 6 helyen csak 5-féle szám allhat.) Tehát olyan dobássorozat, amiben van legalább egy hatos, $6^6 - 5^6$-féle van.

15. Tegyük fel, hogy A és B két esemény, azonos valószínűségi mezőn értelmezve, és valószínűségeikre $\mathbb{P}(A) \geq 0.8$ és $\mathbb{P}(B) \geq 0.5$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0.3$!

Megoldás: Használjuk fel, hogy $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$, és így (mivel $\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \geq 0.8 + 0.5 - 1 = 0.3$

16. Két kockával dobva mennyi annak a valószínűsége, hogy

   (a) két azonos számot dobunk?

   (b) két különböző számot dobunk?

   (c) a két dobás összege 7?

Megoldás:

   (a) 6-féle lehet az azonos szám, es 36-féle kimenetel lehet (első kockán 6 * második kockán 6), tehát a megoldás $6/36 = 1/6$. Másféleképp gondolkozva: az elsővel dobunk valamit (bármit). Ezután $1/6$ annak valószínűsége, hogy a második kockával eltaláljuk ugyanazt.

   (b) az előző esemény komplementeréről van szó, tehát a valószínűség $1 - 1/6 = 5/6$.

   (c) 6-féleképp dobhatok összegnek 7-et $(1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1)$, az összes dobás 36-féle lehet, a valószínűség $6/36 = 1/6$. (Fent is, lent is úgy számoltam, hogy a kockák sorrendje számít.) Megint másképp gondolkozva: az elsővel dobunk valamit, ezután $1/6$ annak valószínűsége, hogy a másodikkal eltalálom azt, ami ahhoz kell, hogy az elsőt 7-re egészítse ki.

17. Egy 26-fős tankörben mi a valószínűsége, hogy legalább két ember egy napon ünnepli a születésnapját?

Megoldás: Számoljuk a komplementert, azaz annak valószínűségét, hogy mindenki különböző napon született. Gondolatban soroljuk fel az embereket, és mindegyik mellé írjuk oda a születésnapját. Az összes eset: mindenki mellé egymástól függetlenül 365-féle dátum kerülhet, ez 365^{26} eset. A jó esetek (mind különböző) száma: $365!/(365-26)! = 365!/339!$. Annak valószínűsége tehát, hogy mindenki különböző napon született, $(365!/339!)/365^{26}$. Innen már könnyen számolhatjuk, hogy az eredeti kérdésre a válasz

$$1 - \frac{365!/339!}{365^{26}}.$$

18. Egy pingpong-meccsen A és B két, azonos esélyekkel induló játékos. Mi a valószínűbb:

   (a) A 4 meccsből pontosan 3-at nyer meg, vagy

   (b) B 8 meccsből pont 5-öt nyer meg?

Megoldás: első: $\binom{4}{3}/2^4 = 1/4 = 8/32$, második: $\binom{8}{5}/2^8 = 7/32$, tehát az első esemény valószínűbb.

19. Egy kulcskarikán lóg n db kulcs. Pontosan 1 nyitja a zárat, de én nem tudom, melyik az. Úgy próbálkozom a zár kinyitásával, hogy mindig egyenletesen véletlenül választok a még ki nem próbált kulcsok közül, amíg csak ki nem nyílik a zár. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan a k-adik próbálkozásom jár először sikerrel?

    Megoldás: $\mathbb{P}$(az első nem nyitja)$=\frac{n-1}{n}$. $\mathbb{P}$(a második sem nyitja)$=\frac{n-2}{n-1}$. …$\mathbb{P}$(a $(k-1)$-edik sem nyitja)$=\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}$. $\mathbb{P}$(mindezek után a k-adik kinyitja)$=\frac{1}{n-(k-1)}$.

    Tehát annak valószínűsége, hogy pont a k-adik nyitja ki, $\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-2}\cdots\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}\frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}$. Az érdekes tehát az, hogy az eredmény nem függ k-tól: $\mathbb{P}$(elsőre nyílik ki)$=\mathbb{P}$(hatodikra nyílik ki)).

20. Egy parkolóban 12 hely van egymás mellett sorban. 8 hely foglalt, de úgy, hogy a 4 fennmaradó hely pont egymás mellett van. Utal-e ez valamilyen különleges körülményre (pl. hogy egy baráti társaság egyszerre ment el)? Számoljuk ki az esemény valószínűséget, feltéve, hogy pont 4 hely szabad.

    Megoldás: Összes eset: $\binom{12}{4}$. A jó esetek száma pedig 9, hiszen ha a 4 kocsi egymás mellett áll, akkor az első kocsi állhat az első, második, …, kilencedik helyen. A válasz ezért $\frac{9}{\binom{12}{4}} = 1/55$.

21. Szórjunk el a sakktáblán egyenletes valószínűséggel 8 bástyát. Mennyi a valószínűsége, hogy egyik sem üti a másikat?

    Megoldás: Gondolkodjunk úgy, hogy a sorrend nem számít. Összesen $\binom{64}{8}$-féle mező-8-as lehet foglalt. Ezek közül válasszuk ki azokat a konfigurációkat, amikor egyik bástya sem üt egyetlen másikat sem. Minden sorban és minden oszlopban is pontosan 1 bástya áll. Az első oszlop ban 8-féle hely lehet ez, de ettől függően a második oszlopban már csak 7 hely jó, a harmadikban 6, stb. A jó esetek száma tehát 8!. A valószínűség $8!/\binom{64}{8}=\frac{8!8!56!}{64!}$.

22. Valaki az angol abc 26 betűjéből (melyek között 5 magánhangzó és 21 mássalhangzó van) véletlenszerűen kiválaszt 4 betűt (minden választásnál mind a 26 betűnek ugyanakkora az esélye), és leírja őket egymás mellé. Mi a valószínűsége annak, hogy se magánhangzók, se mássalhangzók nem kerülnek egymás mellé?

    Megoldás: Az összes esetek száma 26^4. Számoljuk össze, mennyien vannak a „jó" szavak: ha magánhangzóval kezdődik, akkor lehet $5\cdot 21\cdot 5\cdot 21$-féle, és nyilván ugyanennyi, ha mássalhangzóval kezdődik. A jó esetek száma tehát $2\cdot 5^2 21^2$, így a valószínűségség $\frac{26^4}{2\cdot 5^2 21^2}$.

23. Mi a valószínűbb: 6 kockadobásból legalább egyszer hatost dobni, vagy 12 kockadobásból legalább kétszer hatost dobni?

    Megoldás: az első valószínűsége $1-(\frac{5}{6})^6$, a másodiké $1-(\frac{5}{6})^{12} - 12(\frac{5}{6})^{11}$, a második valamivel kisebb az elsőnél.

24. Három kockával dobva, mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege 10-nél nagyobb?

    Megoldás: Ha elsőre 1,2,3 vagy 4 jön ki, akkor nem sikerülhet. Ennek esélye 2/3. Ha 5 jön ki, akkor második dobásra csak a 6-os jó, ha elsőre 6, akkor pedig másodjára jó az 5 is és a 6 is. Tehát a jó esetek valószínűségsége $\frac{1}{36}+\frac{1}{18}=\frac{1}{12}$.

25. Kitöltök és bedobok egy szelvényt az ötös lottón. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy pontosan 3 találatom lesz! Mennyi a valószínűségsége, hogy elveszítem a pénzem, amit a szelvényre költöttem?

    Megoldás: A pontosan 3 találat valószínűsége $\frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}$, ami körülbelül 0,00081. Annak az esélye, hogy elveszítem a pénzem, kb. 0,9767.