Matematika építészmérnököknek

1. gyakorlat (2003. 09. 18.)

Elemi függvények ismétlése, sorozatok I.

(gyak. vez.: Rudas Anna)

A kovetkezo függvénytulajdonságokat ismételtük át:

1. korlátosság,
2. monotonitás,
3. szélsoérték.

A fent leírt tulajdonságokat vizsgáltuk a következo függvények esetében, valamint tisztáztuk az inverz függvény fogalmát:

1. konstans ($c \in \mathbb{R}$ rögzített, $f : x \mapsto c$)
2. lineáris ($a \in \mathbb{R}$ rögzített, $f : x \mapsto ax$)
3. hatvány ($n \in \mathbb{Z}$ rögzített, $f : x \mapsto x^n$)
4. gyök ($n \in \mathbb{Z}$ rögzített, $f : x \mapsto x^{1/n}$)
5. exponenciális ($c \in \mathbb{R}^+$ rögzített, $f : x \mapsto c^x$)
6. logaritmus ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ rögzített, $f : x \mapsto \log_a x$)
7. sinus, cosinus, tangens, cotangens és ezek inverzei, az arcus-sinus, arcus-cosinus, arcus-tangens, arcus-cotangens függvények.

Az óra második felében egy kicsit belekezdtünk a "sorozatok" témakörbe:
Körüljártuk a korlátosság, monotonság kérdése után a sorozat határértékének fogalmát, a definíció (emlékeztetoül) így hangzik:
Az a_n sorozat határértéke a $h \in \mathbb{R}$ szám, vagy másképp írva $\lim_{n\to\infty} a_n = h$, ha

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\, n > n_0 \Rightarrow |a_n - h| < \varepsilon.$$

Azaz, szavakkal leírva: az a_n sorozat határértéke a h valós szám, ha a sorozat a h tetszoleges közelébe eljut, és onnan többet nem lép ki, azaz bármilyen kicsi pozitív ε távolságot is adunk meg, ahhoz létezik egy olyan küszöb, n_0, hogy az n_0-adik elem után már mindenki közelebb van h-hoz, mint ε, azaz minden n_0-nál nagyobb n-re $|a_n - h| < \varepsilon$.
Tisztáztuk még, hogy egy sorozatnak több torlódási pontja is lehet, ha azonban konvergens, akkor csak egyetlen torlódási pontja van, ami egyben a határértéke is. Emlékeztetoül: a torlódási pont olyan szám, hogy a sorozatnak létezik hozzá konvergáló részsorozata.
Ezután pedig a következo példákat vizsgáltuk:

1. $a_n = 3n$, azaz $0, 3, 6, 9, 12, \ldots$, ez nem korlátos (bár alulról igen), szig. mon. no, divergens (végtelenhez tart).
2. $b_n = (-1)^n$, azaz $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$, ez korlátos, nem monoton, divergens, és pontosan két torlódási pontja van: 1 és -1.
3. $c_n = (-1)^n n$, ez nem korlátos (sem felülrol, sem alulról), nem monoton, divergens, valós torlódási pontja nincs, de ∞ és $-\infty$ is "torlódási pontja".
4. $h_n = \frac{2n+1}{n+3} = \frac{2+1/n}{1+3/n}$, ez utóbbi alakból láthatjuk, hogy számlálója 2-höz, nevezoje 1-hez tart, ezért o maga egy az eloadáson vett tétel értelmében $\frac{2}{1} = 2$-höz konvergál.

Végül játszottunk egy kicsit szabály-felismerosdit, azaz egy pár kezdoszám alapján felírtuk a sorozat általános tagját:

1. $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$, ennek $a_n = n + 1$ felel meg
2. $0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$, ennek $a_n = n^2$
3. $0.9, 0.99, 0.999, \ldots$, ennek $a_n = 1 - 10^{n+1}$
4. $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \ldots$, és hogy ennek mi felel meg, azt házi feladat kitalálni.