Matematika építészmérnököknek

3. gyakorlat (2003. 10. 02.)

Sorozatok II.

(gyak. vez.: Rudas Anna)

1. Határozzuk meg a következő határértékeket! Ezeknél a feladatoknál a következő a módszer: ha $x \to x_0$ határeset a kérdés, és az $x = x_0$ behelyettesítés nem okozna a nevezőben nullát, akkor a folytonosság miatt megtehetjük, és a határárték egyenlő a behelyetteítéssel kapottal. Ha a behelyettesítés nem vihető végbe (nevező 0), akkor addig kell alakítgatni a törtet, amíg ez a probléma meg nem szűnik. Ha $x \to \infty$ a kérdés, akkor a sorozatoknál ismertetett módszerrel állapítjuk meg a határértéket.

   (a)
   $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+3}{2x-1} = \frac{4}{1} = 4$$

   (b)
   $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x+3}{2x-1} = \frac{2}{1} = 2$$

   (c)
   $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x(x+1)} = 0$$

   (d)
   $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2} = 3$$

   (e)
   $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+5)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+5}{x+1} = 7/3$$

   (f)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2} = 5$$

   (g)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x}{x^2-x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+3}{x-1} = -3$$

   (h)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{(x+3)^2-9}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+6x}{x} = \lim_{x\to 0} (x+6) = 6$$

   (i)
   $$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2} = \lim_{x\to \infty} \frac{1+3/x-10/x^2}{1-1/x-2/x^2} = 1$$

   (j)
   $$\lim_{x\to \infty} \frac{3x-10}{x^2-x-2} = 0$$

2. A következő, gyökös kifejezést tartalmazó határértékeket a gyöktelenítés módszerével határozhatjuk meg, azaz $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}}$ alakot bővítjük $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}+\sqrt{d}}$-vel.

   (a)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x-x^2}{x} \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = 1$$

   (b)
   $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^4-x}{x^2-1} \frac{x+1}{x^2+\sqrt{x}} = 3/2$$

3. A következő trigonometrikus kifejezést tartalmazó feladatokhoz azt kell tudni, hogy $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

   (a)
   $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}5\frac{\sin 5x}{5x}=5$$

   (b)
   $$\lim_{x\to \infty}\frac{\sin 5x}{x}=0,$$
   hiszen a számláló korlátos, a nevező pedig ∞-hez tart.

   (c)
   $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 10x}=\lim_{x\to 0}\sin 5x\frac{\cos 10x}{2\sin 5x\cos 5x}=1/2$$

   (d)
   $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$$

   (e)
   $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x}=1/2$$

   (f)
   $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=1/2$$

4. Olyan határértékek következnek, amelyek az e szám "vonzáskörébe" tartoznak. Onnan lehet felismerni oket, hogy $\lim_{x\to\infty}(1+\mathrm{f}(x))^{\mathrm{g}(x)}$ alakra hozhatók, pontosan ezt kell velük tenni, és ilyenkor a határérték
   $$e^{\lim_{x\to\infty}\mathrm{f}(x)\cdot\mathrm{g}(x)}.$$
   Speciális esetként érdemes megjegyezni az alap-összefüggést: $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{c}{x})^x=e^c$.

   (a)
   $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{1+x}\right)^x=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1+x}}=e^{-1}$$

   (b)
   $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{1+x}\right)^x=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x}}=\infty$$

   (c)
   $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+3x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1-x}{1+3x}\right)^x=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x+x^2}{1+3x}}=0$$

   (d)
   $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{1+x}\right)^{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{1+x}\right)^{x+\sqrt{x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{1+x}}=e^1=e$$