Matematika építészmérnököknek

5. gyakorlat (2003. 10. 16.)

Függvényvizsgálat

(gyak. vez.: Rudas Anna)

Ha ismeretlen függvény képletével találjuk szembe magunkat, és szeretnénk megtudni róla, hogy körülbelül hogy néz ki, akkor a differenciálszámítás eszközeit is segítségül hívva a következoket tehetjük. Az érthetoség kedvéért egy példafüggvényen minden lépést kövessünk végig:

$$f(x) := (x-2)^2(x-3)^2$$

1. Eloször megállapítjuk a függvény értelmezési tartományát.
   Ez jelen esetben $\mathbb{R}$.

2. Megvizsgáljuk a függvényértékek elojelét.
   Jelen esetben $f(x)$ minden x esetén nemnegatív, azaz a görbe végig az x tengely felett halad.

3. Megvizsgáljuk a tengelymetszeteket, azaz a zérushelyeket és $f(x_0)$ értékét.
   Jelen esetben két zérushely van, 2 és 3, hiszen $f(x)$ szorzat alakú, ami pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezoje 0. Az y tengelyt pedig f az $f(0) = 36$ pontban metszi.

4. Állapítsuk meg a függvény határértékét a végtelenben és a mínusz végtelenben, illetve az értelmezési tartomány szélein.
   Jelen esetben az ért. tart. az egész számegyenes, tehát csak két határértéket számolunk: $\lim_{x\ to\infty} f(x) = \infty$, és $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

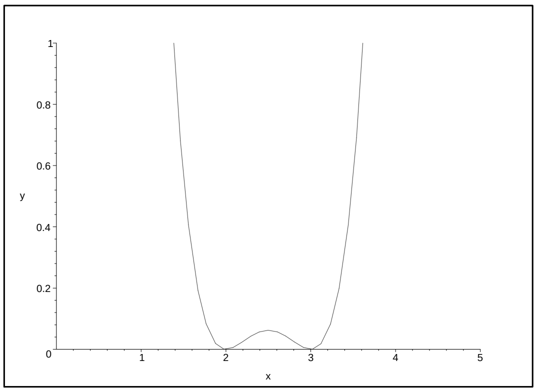
5. Keresünk lokális szélsoértékeket. Ezt a következo tétel alapján tesszük: *Ha f-nek x_0-ban lokális szélsoértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$.* Megvizsgáljuk tehát, hogy mi(k) a megoldása(i) az $f'(x) = 0$ egyenletnek. Ha találunk ilyen x_0-at, akkor azt kell utána vizsgálnunk, hogy milyen az $f''(x)$ függvény elojele az x_0 pontban. Ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) = 0$, akkor x_0-ban nincs lokális szélsoérték, hanem ld. egy késobbi lépésben. Ha azonban $f'(x_0) \neq 0$, akkor ide vonatkozik a következo tétel: *Ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$, akkor f-nek x_0-ban minimuma van, ha pedig $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$, akkor f-nek x_0-ban maximuma van.*
   Jelen esetben
   $$f'(x) = 2(x-2)(x-3)^2 + (x-2)^2 2(x-3) = 4(x-2)(x-3)(x-2.5),$$
   ami az $x_1 = 2$, $x_2 = 2.5$ és $x_3 = 3$ pontokban 0. Számoljuk a második deriváltat:
   $$f''(x) = 4(x-3)(x-2.5) + 4(x-2)((x-2.5)+(x-3)) == 2(6x^2 - 30x + 37),$$
   amibe tehát behelyettesítjük $f'(x)$ zérushelyeit. Kapjuk, hogy $f''(2) = 2 > 0$, itt minimum van, $f''(2.5) = -1 < 0$, itt maximum van, valamint $f''(3) = 2 > 0$, itt minimum van.

6. Monotonitási tartományok keresése. Ehhez csak azt kell tudni, hogy *Ahol $f'(x) > 0$, ott f növekedo, ahol $f'(x) < 0$, ott f csökkeno.*
   Jelen esetben $f'(x)$ elojele 2 alatti x-ekre negatív, 2 és 2.5 között pozitív, 2.5 és 3 között negatív és 3-nál nagyobb x-ekre pozitív, tahát f eloszor csökken, majd no, majd megint csökken, végül megint no.

7. Keresünk inflexiós pontokat (olyan pontot, ahol konvex és konkáv rész csatlakozik össze). Tétel: *Ha f-nek x_0-ban inflexiós pontja van, akkor ott $f''(x_0) = 0$.* Tétel: *Ha $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$, akkor x_0-ban infelxiós pont van.* Azt kell tehát vizsgálni, hogy hol van f''-nek zérushelye, majd ellenorizni, hogy ott f''' nulla-e.
   Jelen esetben az elozo pontban kiszámoltuk az $f''(x)$ függvényt, aminek zérushelyei (másodfokú megoldóképletbol) 2.789 és 2.211, valamint számoljuk ki a harmadik deriváltat:
   $$f'''(x) = 24x - 60),$$
   ebbe helyettesítve az elobb kapott két számot, egyik esetben sem 0-t kapunk, tehát mindkét pontban inflexió van.

8. Konvexitás, konkávitás. Tétel: *Ahol $f''(x) > 0$, ott f konvex, ahol $f''(x) < 0$, ott f konkáv.* Másik jól használható tétel: *Ahol $f'(x)$ növekszik, ott f konvex, ahol pedig $f'(x)$ csökken, ott f konkáv.*
   Jelen esetben egyszerubb az elsot használni, hiszen $f''(x)$-et könnyen fel tudjuk rajzolni, és látjuk, hogy 2.211 alatt pozitív, azaz itt f konvex, 2.211 és 2.789 között negatív, itt f konkáv, és 2.789 felett f'' ismét pozitív, tehát f konvex.

9. Mindezen vizsgálódások után ha kedvünk tartja, már felrajzolhatjuk f hozzávetoleges képét.



A kovetkezo függvényeken gyakoroltuk az elobb részletesen leírt szabályok alkalmazását.

1. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
2. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
3. $f(x) = x^3 + \frac{1}{5x}$

A kovetkezoket pedig ajánlom gyakorlásra:

1. $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$
2. $f(x) = \frac{x^2-x+9}{x^2+x+9}$
3. $f(x) = x + \sin x$
4. $f(x) = e^{-x^2}$
5. $f(x) = e^x \cos x$
6. $f(x) = \ln \sin x$

A MINTA ZH-ban látható ötödik feladatra térnék még ki. Feladat: Az a paraméter mely értéke esetén lesz az

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1)+3 & \text{ha } x < 1 \\ x^3 + 2x & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$

függvény folytonos az $x_0 = 1$ helyen? És milyen a esetén differenciálható az $x_0 = 1$ helyen?

Megoldás: $f(x_0) = f(1) = 3$. A jobboldali határárték ezzel megegyezik, hiszen az 1-nél nagyobb részen egy folytonos függvénnyel definiáltuk $f(x)$-et. Ahhoz, hogy folytonos legyen 1-ben, az kell, hogy a baloldali határárték is 3 legyen. Balról tartva 1-hez mindig az elso sorbeli definíció érvényes $f(x) - re$, azaz a baloldali határárték $a(1-1)+3 = 0+3 = 3$, bármi is volt az a paraméter. Azaz f mindig folytonos x_0-ban. Nézzük a differenciálhatóságot: a jobboldali derivált x_0-ban $3x_0^2 + 2 = 5$, a baloldali derivált pedig a. A függvény akkor differenciálható, ha a jobboldali és baloldali deriváltja megegyezik, azaz ha $a = 5$.