Matematika 2 építészmérnököknek

5. gyakorlat (2004. 03. 31. illetve április 1.)

Többváltozós függvények I.

(gyak. vez.: Rudas Anna)

Elsőrendű parciális deriváltak:

Határozzuk meg az alábbi függvények elsőrendű parciális deriváltjait:

Tipp: nem kell mást tenni, mint hogy x szerinti deriváláskor konstansnak tekintjük y-t, és x-et tekintjük változónak, y szerinti deriváláskor pedig épp fordítva: y a változó és x a konstans.

1. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

   Megoldás: $f'_x(x,y) = 3x^2 - 3y$

   $f'_y(x,y) = 3y^2 - 3x$

2. $f(x,y) = x^y$

   Megoldás: $f'_x(x,y) = yx^{y-1}$

   $f'_y(x,y) = x^y \ln x$

3. $f(x,y) = \arcsin \frac{y}{x}$

   Megoldás: $f'_x(x,y) = \frac{-y}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}$

   $f'_y(x,y) = \frac{1}{x\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}$

4. $f(x,y) = y^2 \ln \sqrt{xy}$

   Megoldás: $f'_x(x,y) = \frac{y^3}{2xy}$

   $f'_y(x,y) = 2y \ln \sqrt{xy} + \frac{xy^2}{2xy}$

5. $f(x,y) = \frac{x^3 e^y}{1+\sin x + y^2}$

   Megoldás: $f'_x(x,y) = \frac{3x^2 e^y (1+\sin x + y^2) - x^3 e^y \cos x}{(1+\sin x + y^2)^2}$

   $f'_y(x,y) = \frac{x^3 e^y (1+\sin x + y^2) - x^3 e^y 2y}{(1+\sin x + y^2)^2}$

Másodrendű parciális deriváltak:

Határozzuk meg az alábbi függvények másodrendű parciális deriváltjait, ellenőrizve, hogy valóban $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$:

Tipp: ehhez azt kell csak tudni, hogy például f''_{xy} azt jelenti, hogy a függvényt először x szerint deriváljuk, majd amit így kaptunk, azt y szerint deriváljuk. Hasonlóan f''_{xx} azt jelenti, hogy mind a kétszer x szerint deriválunk.

1. $f(x,y) = \ln(x + e^y)$

   Megoldás: Ehhez kellenek az elsőrendűek először:

   $f'_x(x,y) = \frac{1}{x+e^y}$

   $f'_y(x,y) = \frac{e^y}{x+e^y}$

   Ezekből a másodrendűek: $f''_{xx}(x,y) = -\frac{1}{(x+e^y)^2}$

   $f''_{xy}(x,y) = -\frac{e^y}{(x+e^y)^2}$

   $f''_{yx}(x,y) = -\frac{e^y}{(x+e^y)^2}$

   $f''_{yy}(x,y) = \frac{e^y(x+e^y)+e^{2y}}{(x+e^y)^2}$

2. $f(x,y) = x^y$

   Megoldás: Az elsőrendűeket már egyszer kiszámoltuk feljebb:

   $f'_x(x,y) = yx^{y-1}$

   $f'_y(x,y) = x^y \ln x$

   Ezekből a másodrendűek: $f''_{xx}(x,y) = y(y-1)x^{y-2}$

   $f''_{xy}(x,y) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x$

   $f''_{yx}(x,y) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x$

   $f''_{yy}(x,y) = x^y \ln^2 x$

Iránymenti deriváltak:

Az $f(x,y)$ függvény (x_0,y_0) pontbeli, $\underline{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ irány menti deriváltját a következő képlet adja meg: $f'_\alpha(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha$

1. Határozza meg az $f(x,y) = (x-y)^2$ függvény $\alpha = \frac{Pi}{3}$ irányú iránymenti deriváltját a $P(2,3)$ pontban!

   Megoldás: $\cos\alpha = \frac{1}{2}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'_x(x,y) = 2(x-y), f'_y(x,y) = -2(x-y)$, ebből $f'_{\frac{Pi}{3}}(2,3) = \sqrt{3}-1$.

2. Határozza meg, mely irány esetén nulla az $f(x,y) = x^3+y^3-3xy+e^y$ függvény $P(2,0)$ pontbeli iránymenti deriváltja!

   Megoldás: $f'_x(x,y) = 3x^2-3y \quad f'_y(x,y) = 3y^2-3x+e^y \quad f'_\alpha(x,y) = (3x^2-3y)\cos\alpha + (3y^2-3x+e^y)\sin\alpha$
   $f'_\alpha(2,0) = 12\cos\alpha - 5\sin\alpha = 0$, ebb?l $\alpha = \arctan\frac{12}{5}$.

Érintősík egyenlete:

Az érint?sík képlete $f'_x(x-x_0) + f'_y(y-y_0) - (z - f(x_0,y_0)) = 0$, amit úgy kell érteni, hogy mindig adott egy (x_0,y_0) pont, és az f'_x illetve f'_y parciális deriváltakat abban a pontban kell nézni (ld. a feladatokban).

1. Írja fel az $f(x,y) = 2x^2+y^2-2xy+4x-2y+5$ görbe $P(1,2)$ pontbeli érint?síkjának egyenletét!

   Megoldás: $f'_x(x,y) = 4x-2y+4 \quad f'_x(1,2) = 4$ és $f'_y(x,y) = 2y-2x-2 \quad f'_y(1,2) = 0$, valamint $f(1,2) = 7$, ezekb?l tehát az érint?sík egyenlete $4(x-1)-(z-7) = 0$.

2. Írja fel az $f(x,y) = (x^2-6x)(y^2-4y)$ görbe $P(1,2)$ pontbeli érint?síkjának egyenletét!

   Megoldás: $f'_x(x,y) = (2x-6)(y^2-4y) \quad f'_x(1,2) = 16$ és $f'_y(x,y) = (x^2-6x)(2y-4) \quad f'_y(1,2) = 0$, valamint $f(1,2) = 20$, ezekb?l tehát az érint?sík egyenlete $16(x-1)-(z-20) = 0$.