Matematika 2 építészmérnököknek

6. gyakorlat (2004. április 7. illetve 8.)

Többváltozós függvények II.

(gyak. vez.: Rudas Anna)

Kett?s integrálás téglalap tartományon:

Ha a T tartomány, amin integrálni fogunk, téglalap, akkor a két integrálás tetsz?leges sorrendben elvégezhet?, csak arra kell figyelni, hogy a megfelel? változó kerüljön a megfelel? határok közé. Ld. a példákban!

1. $T = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1\}$ tartományon $\int\int_T (x^2+4y)\mathrm{d}T = \int_0^1\int_0^1 (x^2+4y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 [\frac{x^3}{3} + 4xy]_{x=0}^1 \mathrm{d}y = [\frac{1}{3}y + 2y^2]_{y=0}^1 = \frac{7}{3}$.
2. $T = \{(x,y) : 0 \le x \le \ln 2, \quad 0 \le y \le \ln 3\}$ tartományon $\int\int_T e^{3x+4y}\mathrm{d}T = \int_0^{\ln 2}\int_0^{\ln 3} e^{3x+4y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2}[\frac{1}{4}e^{3x+4y}]_{y=0}^{\ln 3}\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} 20e^{3x} = \frac{140}{3}$.
3. $T = \{(x,y) : 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le a\}$ tartományon, ahol $a > 0$ paraméter: $\int\int_T e^{-x-y}\mathrm{d}T = \int_0^a\int_0^a e^{-x-y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^a [-e^{-x-y}]_{y=0}^a \mathrm{d}x = \int_0^a (-e^{-x-a} + e^{-x})\mathrm{d}x = e^{-2a} - 2e^{-a} + 1$.
4. $T = \{(x,y) : 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$ tartományon $\int\int_T \sin(x+y)\mathrm{d}T = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[-\cos(x+y)]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}y = [\sin(y+\frac{\pi}{2}) + \sin y]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} = 2$

Kett?s integrálás normáltartományon:

T normáltartomány, ha az egyik (pl. x) változó két konstans között van, a másik pedig az iménti változó adott értéke mellett annak bizonyos függvényei között mozog. Ilyenkor úgy integrálunk, hogy a konstansok között mozgó változó szerint kívül, a másik szerint pedig belül integrálunk, ez utóbbi elvégzésekor a küls? változó megfelel? függvényei az integrálási határok. Ld. a példákban!

1. Az $y = x^2$ és $y = \sqrt{x}$ görbék által határolt tartományon: $\int\int_T 2xy\mathrm{d}T = \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 [xy^2]_{y=x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{2}{15}$.
2. Az $y = \frac{1}{x}, x = 1, x = 2, y = 0$ görbék által határolt tartományon: $\int\int_T \frac{2y}{x+1}\mathrm{d}T = \int_1^2\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{2y}{x+1}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_1^2 [\frac{y^2}{x+1}]_{y=0}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = \int_1^2(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1})\mathrm{d}x = \ln 3 - 2\ln 2 + \frac{1}{2}$, itt az egyik lépésnél használtuk a parciális törtekre bontás módszerét.
3. $T = \{(x,y) : 0 \le x \le y, \quad 0 \le y \le 1\}$ tartományon $\int\int_T y\sin x\mathrm{d}T = \int_0^1\int_0^y y\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 [-y\cos x]_{x=0}^y \mathrm{d}y = -\sin 1 - \cos 1 + \frac{3}{2}$
4. Azon a tartományon, amit az $A(1,1), B(0,3), C(3,0)$ pontok határolnak: $\int\int_T (x^2+2y)\mathrm{d}T = \int_0^1\int_{-2x+3}^{-x+3}(x^2 + 2y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^3\int_{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}^{-x+3}(x^2+2y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \ldots$ (bocs, ez a számolás egyel?re meghaladta a türelmemet)