

Matematika B4

X. gyakorlat

2005. április 21.

1. Sűrűségfüggvény a síkon

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. $f(x, y) \geq 0$, minden x, y valós számra.
- 2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

Az A tartományba esés valószínűsége:

$$P(A) = \iint_A f(x, y) dx dy$$

Feladatok:

1. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

a)

$$f(x, y) = \frac{4}{5}(x + xy + y) \quad , \quad \text{ha } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

b)

$$f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \quad , \quad \text{ha } x > 0, \quad y > 0$$

c)

$$f(x, y) = 4xy - 10 \quad , \quad \text{ha } x^2 + y^2 < 1$$

d)

$$f(x, y) = \frac{1}{x} \quad , \quad \text{ha } 0 < y < x < 1$$

2. Határozzuk meg c-t úgy, hogy $f(x, y)$ sűrűségfüggvény legyen:

$$f(x, y) = cy \quad , \quad \text{ha } x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < 1$$

3. Vegyük az első feladat b.) részében megadott $f(x) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ függvényt. Számítsuk ki az alábbi események valószínűségét:

- a) $0 < X < 1$ és $0 < Y < 1$
- b) $1 < X < 5$ és $2 < Y < 8$
- c) $0 < X < 1$
- d) $3 < Y < 5$

4. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót:

Első koordinátája legyen egy véletlen szám: $X = RND_1$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen számmal: $Y = RND_1 \cdot RND_2$. Valamint definiáljuk a következő eseményeket: $A = \{X > \frac{1}{2}\}$ és $B = \{Y < \frac{1}{2}\}$.

a) Előadáson szerepelt, de gondoljuk át még egyszer, hogy ennek a sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \frac{1}{x}, \quad \text{ha } 0 < y < x < 1$$

- b) $P(A) = ?$
- c) $P(B) = ?$
- d) $P(A \text{ és } B) = ?$
- e) $P(A|B) = ?$
- f) $P(B|A) = ?$

5. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót:

Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy véletlen számmal: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot RND_2$.

- a) Számoljuk ki e 2-dimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
- b) $P(Y < \frac{1}{4}) = ?$
- c) $P(Y < y) = ?$

6. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}}, \quad \text{ha } 0 < x < 1, \quad 0 < y < x^2.$$

- a) Igazoljuk, hogy ez valóban sűrűségfüggvény!
- b) $P(X + Y < 1) = ?$
- c) $P(X < x) = ?$
- d) $P(Y < y) = ?$

2. 2-dimenziós valószínűségi változó függvényének várható értéke

A $t(X, Y)$ valószínűségi változó várható értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) \cdot f(x, y) dx dy$$

Speciálisan X és Y szorzatának várható értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy$$

Feladatok:

7. Vegyük a következő 2-dimenziós valószínűségi változót:
Első koordinátája legyen $X = \sqrt{RND_1}$. A másik koordinátája pedig ez az érték beszorozva egy másik véletlen szám négyzetgyökével: $Y = \sqrt{RND_1} \cdot \sqrt{RND_2}$.
- a) Számoljuk ki e 2-dimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
 - b) Legyen $t(x, y) = xy$. Mennyi $t(X, Y)$ valószínűségi változó várható értéke?
 - c) Legyen $t(x, y) = xy^2$. Mennyi $t(X, Y)$ valószínűségi változó várható értéke?
8. Mennyi az 1.a.), ill. 4. feladatban szereplő eloszlás várható értéke?

3. Feltételes eloszlás

A legfontosabb az alábbi összefüggés:

$$P(c < Y < d | X = x) = \int_c^d f_{2|1}(y|x) dy = F_{2|1}(d|x) - F_{2|1}(c|x)$$

Feladatok:

9. Vegyük ismét a 4.feladatban szereplő eloszlást!
- a) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.5) = ?$
 - b) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = 0.8) = ?$
 - c) $P(Y \in (0.3, 0.4) | X = x) = ?$
10. Vegyük ismét a 4.feladatban szereplő eloszlást!
- a) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = 0.1) = ?$
 - b) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = 0.4) = ?$
 - c) $P(X \in (0.5, 0.7) | Y = y) = ?$
11. Legyenek X és Y független 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.
- a) $P(X + Y < 3) = ?$
 - b) $P(X + Y < z) = ?$
 - c) $P(X + Y < 3 | X < 2) = ?$
 - d) $P(2 < X + Y < 3 | Y > 1) = ?$

4. Függetlenség

Akkor független két valószínűségi változó, ha minden x -re és y -ra fennáll, hogy

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Ezzel ekvivalens megfogalmazások az alábbiak:

$$f_{2|1}(x, y) = f_2(y) \quad , \text{ill.} \quad f_{1|2}(x, y) = f_1(x)$$

Feladatok:

12. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x, y) = \frac{1}{9}xy \quad , \text{ ha } 0 < x < 2, \quad 0 < y < 3$$

a) Független-e X és Y?

b) $P(X < u, Y < v) = ?$, ahol $0 < u < 2$ és $0 < v < 3$.

13. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x, y) = 24xy \quad , \text{ ha } 0 < x, \quad 0 < y, \quad x + y < 1$$

a) Független-e X és Y?

b) $P(X < u, Y < v) = ?$, ahol $u, v > 0$ és $u + v < 1$.

14. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x, y) = 1 \quad , \text{ ha } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2(1 - x).$$

a) $P(X < x, 1 < Y < \frac{3}{2}) = ?$

b) Független-e X és Y?