Matematika B4
XI. gyakorlat

2005. április 28.

1. Folytonos valószínűségi változók transzformációi

$y = a + bx$ egy lineáris transzformáció. Ha $Y = a + bX$ és X sűrűségfüggvénye $f(x)$, eloszlásfüggvénye $F(x)$, Y sűrűségfüggvénye $g(y)$, eloszlásfüggvénye $G(Y)$, akkor:

$$G(y) = \left\{ \begin{array}{cc} F(x) = F(\frac{y-a}{b}) & \text{ha } b > 0 \\ 1 - F(x) = 1 - F(\frac{y-a}{b}) & \text{ha } b < 0 \end{array} \right\}$$

$$g(y) = \frac{f(\frac{y-a}{b})}{|b|}$$

Ha t függvény monoton növekvő, és t^{-1} folytonosan differenciálható, akkor

$$G(y) = F(t^{-1}(y))$$

$$g(y) = f(t^{-1}(y)) \left[t^{-1}(y)\right]'$$

És az általános képlet, ha t monoton növő és monoton csökkenő darabokból áll:

$$g(y) = g_1(y) + g_2(y) + \cdots + g_i(y)$$

ahol $g_j(y)$ a t függvény j. darabjából adódó sűrűségfüggvény.

Ha X tetszőleges valószínűségi változó, $F(x)$ az eloszlásfüggvénye, akkor $F^{-1}(RND)$ Y-nal megegyező eloszlású.

Feladatok:

1. Vegyük azt az X folytonos eloszlást, amelynek a sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x$ ha $x \in [0, 1]$, egyébként 0.
   a) Mi lesz az $Y = 3 + 5X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye?
   b) Lineáris transzformáció segítségével standardizáljuk X eloszlását, azaz találjunk egy olyan $t(x) = a + bx$ függvényt, hogy $t(X) = a + bX$ valószínűségi változó 0 várható értékű, és 1 szórású legyen.
2. RND egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 1]$ intervallumon. Keressünk alkalmas t függvényt, hogy $Y = t(RND)$
   a) 2 paraméterű exponenciális eloszlású legyen.
   b) $x \in [10, 30]$-on egyenletes eloszlású legyen.
3. A zsebszámológép RND gombja és egy transzformáció segítségével generáljunk három $CAUCHY$ eloszlású pontot. (Segítségül a $CAUCHY$ eloszlás eloszlásfüggvénye: $\frac{1}{2} + \frac{ArcTan(x)}{\pi}$)

4. Egy villanykörte-gyár λ paraméterű exponenciális eloszlás szerint kiégő villanykörtét gyárt. A konkurens cég is tud λ paraméterű exponenciális szerint kiégőt gyártani, ezért hosszú kutatás után bevezetnek egy új eljárást, amely segítségével megháromszorozták az izzók élettartalmát. Milyen lett így az új izzók élettartalmának eloszlása?

5. Legyen X egyenletes eloszlású az $[5, 8]$ intervallumon.

   a) Számoljuk ki $|X - 6|$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

   b) Számoljuk ki X^2 eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

6. Vegyünk egy két dimenziós (X, Y) eloszlást, amelynek sűrűségfüggvénye $f(x, y) = 4xy$ ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$, egyébként 0. Számoljuk ki külön-külön $U = XY$ és $V = Y/X$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

2. Konvolúció

Ha X és Y *diszkrét* valószínűségi változók, akkor $Z = X + Y$ eloszlását könnyedén ki tudjuk számolni.

$$P(X + Y = l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k \cap Y = l - k)$$

Ha függetlenek is, akkor

$$P(X + Y = l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k)P(Y = l - k)$$

Például ha X, Y két szabályos dobókockával dobott értéket jelöl, akkor a képlet szerint:

$$P(\text{dobások összege } = 8) = P(X = 2)P(Y = 6) + P(X = 3)P(Y = 5)+ \\ P(X = 4)P(Y = 4) + P(X = 5)P(Y = 3) + P(X = 6)P(Y = 2)$$

Ugyanilyen logikával számoltunk a félév elején.
Folytonos esetben is hasonló képletet kapunk. Ha X és Y függetlenek, továbbá X sűrűségfüggvénye $f(x)$, Y sűrűségfüggvénye $g(y)$, és $Z = X + Y$ sűrűségfüggvényét $h(z)$-vel jelölve:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z - x)dx$$

Feladatok:

7. A számológépemmel generálok két véletlen számot $[0, 1]$-en, és összeadom őket. Írjuk fel az összeg eloszlásának sűrűségfüggvényét!

8. Számoljuk ki egy $[0, 2]$-n és egy $[0, 3]$-an egyenletes eloszlású valószínűségi változók összegének sűrűségfüggvényét.

9. Számoljuk ki egy λ_1 és egy λ_2 paraméterű exponenciális eloszlás konvolúcióját! (Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, akkor ezt nevezzük $GAM(\lambda, 2)$ eloszlásnak.)

10. X és Y egymástól független valószínűségi változók, melyek egyenletes eloszlásúak az $[1, 5]$ intervallumon. Vezessük le $X - Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!

11. Számoljuk ki $X - Y$ sűrűségfüggvényét, ha

    a) X és Y egymástól független 2 paraméterű exponenciális eloszlás.

    b) X λ paraméterű, Y μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.

3. Gamma eloszlás

n db λ paraméterű független exponenciális eloszlás összegének eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i x^i}{i!} e^{-\lambda x} \qquad \text{ha } x > 0$$

sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \qquad \text{ha } x > 0$$

Feladatok:

12. Éjszaka bárányok helyett az ablakom alatt elhaladó kocsikat számolom. Átlagosan 3 perc telik el két autó elhaladása között. Mi a valószínűsége, hogy 6 perc alatt 3 kocsi hangját is hallom?

13. Egy világítótoronyban kell megoldanunk a folyamatos (éjjel-nappali) világítást. A reflektorban az égők, amiket használunk exponenciális eloszlásúak 3 nap várható értékkel. Legközelebb új égőket csak 7 nap múlva kapunk. Mi a valószínűsége, hogy addig tudunk folyamatosan világítani, ha még 4 működőképes égőnk van?

Házi feladat:

14. Válasszunk 4 db pontot a $[0, 1]$-en egymástól függetlenül. A második legnagyobb pont helyét jelöljük X-szel. Mi lesz X eloszlásfüggvénye és sűrűségfüggvénye? És X^3-é?

15. Számoljuk ki 3 db λ paraméterű exponenciális eloszlás konvolúcióját! *Útmutatás:* Kettőre már kiszámoltuk, konvolváljunk az eredményhez még egy λ paraméterű exponenciális eloszlást.

16. * Számoljuk ki n db λ paraméterű exponenciális eloszlás összegének eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! (Használjunk indukciót!)