Matematika B4
XIII. gyakorlat

2005. május 12.

1. Centrális határeloszlás tétel

Egy véges szórásnégyzetű valószínűségi változóra sok független kísérletet végezve, majd az eredmények átlagának standardizáltját véve közelítőleg standard normális eloszlású valószínűségi változót kapunk.
Amennyiben az eredeti valószínűségi változóink: $X_1, X_2, \ldots$ függetlenek és azonos eloszlásúak, melyeknek várható értéke $\mathbb{E}(X_k) = m$, szórásnégyzete $Var(X_k) = \sigma^2$, valamint az első n valószínűségi változó összege $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, a CHT a következőt mondja ki:
$\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{Var S_n}} < x) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x) = \Phi(x)$
Emiatt elég nagy n esetén használhatjuk a Φ függvényt n független, azonos eloszlású valószínűségi változó konvolúciójából adódó eloszlás közelítésére.
Feladatok:

1. Számítsuk ki az n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlás standardizáltját $n \to \infty$ esetén $p = 0.4$, $p = 0.02$, illetve $p = 0.96$ esetekben!

2. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 12000 kockadobás során előforduló hatosok száma 1900 és 2150 közé esik?

3. Határozzuk meg azt a k egész számot, amelyre igaz, hogy annak a valószínűsége, hogy 1000 érmedobás során a fejek száma 490 és k közé esik, kb. 0.5!

4. Hányszor kell egy érmével dobnunk ahhoz, hogy 0.99-nál nagyobb valószínűséggel a fej eredmények száma a dobások számának 49%-a és 51%-a közé essen?

5. Egy északi sarki téli tábor irodájában kell folyamatosan világosságot biztosítani. Az izzók, amiket használnak exponenciális eloszlásúak 10 óra várható értékkel. Legalább hány ilyen izzóra van szükség ahhoz, hogy a 60 napra tervezett táborban legalább 0,9 valószínűséggel folyamatosan éghessen a villany? (Az izzócserék időtartama elhanyagolható.)

6. Dömötör rulettezik a kaszinóban. Minden egyes körben 10 petákot tesz 'piros'-ra. 100 játék után 300 peták a vesztesége. Jogos-e a gyanúja, hogy svindliz a croupier? (A rulett-körön összesen 37 mező van 0-tól 36-ig számozva. Ezek közül egy (a 0 jelű) zöld, a fennmaradó 36-ból pedig 18 piros és 18 fekete.)

7. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 50 darab azonos eloszlású X valószínűségi változó összege a $[0, 30]$ intervallumba esik, ha X eloszlása a [0, 1] intervallumon

   a) egyenletes;

   b) $f(x) = 2x$ sűrűségfüggvény szerint alakul?

8. Adjon közelítő értéket arra, hogy mekkora valószínűséggel esik egy 100-adrendű, 3 paraméterű gamma eloszlású valószínűségi változó a $[30, 35]$ intervallumba!

2. Markov-egyenlőtlenség

Ha X egy nemnegatív valószínűségi változó, melynek várható értéke véges, akkor tetszőleges $\lambda \in]0, \infty[$ esetén
$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$.

3. Csebisev-egyenlőtlenség

Ha X egy olyan valószínűségi változó, melynek második momentuma véges, várható értéke m, szórásnégyzete pedig σ^2, akkor tetszőleges $\lambda \in]0, \infty[$ esetén
$\mathbb{P}(|X - m| \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2}$.

4. Nagy számok gyenge törvénye

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek második momentuma véges. Ha a $m := \mathbb{E}(X_j)$; $\sigma^2 := Var(X)$; $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ jelöléseket alkalmazzuk, akkor a nagy számok gyenge törvénye szerint
$\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - m| > \varepsilon) = 0$, tetszőleges ε esetén.