

Matematika B4

II. gyakorlat

2005. február 24.

1. Bevezető kérdések

1. Feldobunk egy kockát és egy érmét. Ábrázoljuk az eseményteret! Legyenek adottak az alábbi események: 3-ast dobunk, 4-est dobunk, fejet dobunk, írást dobunk. Ezek közül melyek alkotnak: független párt? diszjunkt párt? teljes eseményrendszert?
2. Egy szabályos kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy 6-ost dobunk, ha tudjuk, hogy: párosat dobunk? legalább 3-ast dobunk? legfeljebb 5-öst dobunk?

2. Feltételes valószínűség

Vizsgálhatjuk egy (A) esemény bekövetkezésének valószínűségét úgy is, ha tudjuk, hogy egy másik (B) esemény bekövetkezett. Például ha a lottón az első 4 szám talált, és még most húzzák az ötödik nyerőszámot, akkor nagyobb a telitalálat valószínűsége, mint a sorsolás megkezdése előtt. A fenti jelölésnél $P(A|B)$ a feltételes valószínűség. (Olvasva: A valószínűsége feltéve B -t.) Számítása:

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ és } B)}{P(B)}$$

3. A barátommal snapszerozom. Ebben a játékban 20 darab lap van, minden színből 5. Kiosztok 5-5 lapot. Mi a valószínűsége, hogy az ellenfélnek van zöldje, ha nekem 3 zöldem és két pirosam van? És ha nem tudom milyen lapjaim vannak (még nem néztem meg)?
4. Feldobunk 2 kockát. Mi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kockán 2-est dobunk, ha már tudjuk, hogy a dobott számok összege 6? És ha nem tudunk semmit?
5. Tegyük fel, hogy azonos eséllyel szülnék az anyák lányt illetve fiút. A kétgyerekes családokat vizsgálva, mennyi annak a valószínűsége, hogy két fiú van, ha tudjuk, hogy van fiú? És mennyi az esélye, hogy van lány is, ha tudjuk, hogy van egy fiú?

3. Szorzási szabály

Feltételes valószínűségek szorzási szabálya:

$$P(A_n \cdot A_{n-1} \cdot \dots \cdot A_1) = P(A_n | A_{n-1} \cdot \dots \cdot A_2 \cdot A_1) P(A_{n-1} | A_{n-2} \cdot \dots \cdot A_2 \cdot A_1) \dots P(A_3 | A_2 \cdot A_1) P(A_2 | A_1) P(A_1)$$

6. Egy urnában 3 piros, 5 fehér és 6 zöld golyó van. Kihúzzunk közülük 3 golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre pirosat, másodikra fehérret, harmadikra zöldet húzzunk, ha húzás után a golyókat
 - a) Visszatesszük
 - b) Nem tesszük vissza?

7. Egy lakótelepen csótányirtást végeztek. Az első vegykezelés még a csótányok 60%-át irtja ki, de utána a csótányok egyre inkább immúnissá válnak, így a másodsorra már csak a 40%, harmadsorra pedig csak a 20%-uk pusztul el. Mi a valószínűsége, hogy egy megjelölt csótány
 - a) Átvészeli a teljes eljárást?
 - b) Az utolsó irtáskor pusztul el?
 - c) Túléli a kezelést, ha az első kezelés után még látták élve?
8. Egy dobozban 16 tranzisztor közül 3 hibás. Mi a valószínűsége, hogy három egymás után kivett tranzisztor működőképes?

4. Teljes valószínűség tétele

Ha H_1, H_2, \dots, H_n teljes eseményrendszert alkot (azaz páronként diszjunktak és együtt kiadják a biztos eseményt), A pedig tetszőleges esemény, akkor:

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \dots + P(A|H_n)P(H_n).$$

9. Egy sulis tanulóinak 80%-a lány. Az első matekvizsgán általában a nők 15%-át, a fiúk 10%-át húzzák meg. A hallgatóságnak hány %-a bukik meg az első vizsgán?
10. Információink szerint az A céggel kötött üzleteink 60%-a, a B céggel kötött üzletek 70%-a bizonyul kedvezőnek. Kettőjük közül a hamarabb jelentkező céggel rögtön két üzletet is kötünk. Mi a valószínűsége, hogy
 - a) Az első üzletkötés kedvező lesz?
 - b) Mindkét üzletkötés javunkra válik?
 - c) Lesz köztük rossz és jó üzlet is?
11. Iszákos Iván a nap 2/3 részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsmában van, és nem válogató, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az 5.-ben ott lesz?

5. Bayes tétel

Ha A már bekövetkezett, mi annak a valószínűsége, hogy ez pontosan az H_i eseménnyel együtt valósult meg? A definíció szerinti képletet felírva, a számlálóba a feltételes valószínűség, a nevezőbe a teljes valószínűség képletét alkalmazva adódik a képlet, hogy:

$$P(H_i|A) = \frac{P(A \text{ és } H_i)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}$$

12. A ketyere gyárban az A, B és C gépsoron állítják elő a ketyeréket. Az A gépsoron a ketyerék 25, a B-n 35, a C-n 40%-át gyártják. Az A gépsoron előállított ketyerék 5%-a, a B gépsoron előállítottak 4%-a, a C-n gyártott ketyeréknek csak 2%-a hibás. A hibásakat félredobják egy nagy kupacba. Ebből véletlenszerűen kiszedve egy ketyerét, mi a valószínűsége, hogy azt az A, B, illetve a C gépsoron gyártották?
13. Vándorlásai közben Odüsszeusz egy hármass útágazáshoz ér. Az egyik út Athénbe, a másik Spártába, a harmadik Mükénébe vezet. Az Athéniak kereskedő népség, szeretik ámítani a látogatókat, csak minden 3. alkalommal mondanak igazat. A mükénéiek egy fokkal jobbak: ők csak minden második alkalommal hazudnak. A szigorú spártai neveltetésnek köszönhetően a spártaiak becsületesek, ők mindig igazat mondanak. Odüsszeusznak gőze sincs, melyik út merre vezet, így feldob egy kockát, és egyenlő eséllyel adva mindegyik útnak. Megérkezve a városba, megkérdez egy embert, mennyi $2 \cdot 2$, mire közlik vele, hogy 4. Mi a valószínűsége, hogy Odüsszeusz Athénba jutott?

14. Az igazak városában az emberek 90%-a igazat mond, a hazugok városában az emberek 85%-a hazudik. Mivel lefüggönyözött busszal hoztak ide minket, nem tudjuk melyikben vagyunk. Megkérdezzük egy embert, aki azt mondja, hogy "Ez a hazugok városa." Mi a valószínűsége, hogy igazat mond?

6. Házi feladatok

15. Egy iskolába 260 ember jár, 230 tanuló és 30 tanár. Egyszer egy influenzajárvány tört ki köztük. Az orvos az alábbi táblázatot készítette:

	Beteg	Egészséges	Összesen	Esemény
Fiú	50	60	110	B1
Lány	40	80	120	B2
Tanár	10	20	30	B3
Összesen	100	160	260	
Esemény	A1	A2		

- a) Véletlenszerűen kihúzzunk egy kartont. Mi a valószínűsége, hogy:
- fiúé?
 - betegé?
 - Beteg fiúé?
- b) Ha előzetesen a fiúk, lányok és tanárok kartonjait külön fiókokba gyűjtötték, én a lányokéból húzok, mi a valószínűsége annak, hogy beteg lányt húztam?
- c) Az orvos szorgos asszisztense egy kupacba kidobálta a fiókokból az összes kartont, aki beteg volt. Ebből véletlenszerűen húzva egyet, mi a valószínűsége annak, hogy tanár az illető?
- d) (*) Ha kettőt húzok ugyanebből a beteg-kupacból egymás után, mi a valószínűsége, hogy az első fiú lesz, a második lány? És hogy mindkettő fiú lesz?
16. Egy valószínűségszámítás vizsgán 30 tétel van ezek közül 6 a nevezetes eloszlásokkal kapcsolatos. Az első két szóbeliző hallgató kihúz egy-egy tételt. Mi annak a valószínűsége, hogy
- Csak az első hallgató húz nevezetes eloszlásos tételt?
 - Mindkét hallgató ilyen tételt húz (húzhatják mindketten ugyanazt is!)
 - Egyik sem húz ilyen tételt?
17. Egy P kockának 4 piros és 2 fehér, egy Q kockának 2 fehér és 4 piros lapja van. Feldobunk egy érmét. Ha a dobás fej a P-vel, ha írás, akkor Q-val dobunk.
- Mi annak a valószínűsége, hogy a dobás piros lesz?
 - És ha tudjuk, hogy fejet dobunk?
 - Mi annak a valószínűsége, hogy a k. dobás piros lesz?
 - (*) És ha tudjuk, hogy az előző k-1 dobás mind piros volt?
 - Tudjuk, hogy az eredmény piros. Mi a valószínűsége, hogy P kockával dobtunk?
18. Egy bináris csatornán a 0 jelet $1/3$, az 1 jelet $2/3$ valószínűséggel adják le. Mivel az adást az ellenséges politikai erők zavarják, ha 0-t adnak le, akkor $1/4$ valószínűséggel 1 érkezik, ha pedig 1-et adnak le, $1/5$ valószínűséggel 0 érkezik.
- Kaptunk egy 0-t. Mi az esélye, hogy ezt 0-ként is adták le?
 - Mi a valószínűsége, hogy 1-et kapunk?