

Matematika B4

III. gyakorlat

2005. március 3.

1. Bevezető kérdések

1. Egy piros és egy kék dobókockával dobunk. Tekintsük az alábbi 3 eseményt: a piros kockával párosat dobunk, a kék kockával párosat dobunk, a dobott összeg páros. Függetlenek-e ezek az események?
2. A tanult nevezetes eloszlások közül melyik illik legjobban az alábbi valószínűségi változók modellezésére?
 - a) hányadik autó vesz fel, amikor kiállok az országútra, mert autóstoppal akarok utazni?
 - b) 10 autó közül hány vesz fel stopposokat?
 - c) a 12. autó a harmadik piros?

2. Független események

A és B esemény függetlenek, ha teljesül, hogy $P(AB) = P(A)P(B)$. Több esemény akkor független, ha nem csak az teljesül, hogy

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \dots P(A_n)$$

hanem tetszőleges A_i -k helyett mindkét oldalon azok komplementerét véve is igaz az egyenlőség, például a következő esetben:

$$P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \overline{A_4} \dots A_n) = P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})P(\overline{A_4}) \dots P(A_n)$$

Ilyen egyenletből 2^n darab van.

Feladatok:

3. Kétszer egymás után feldobunk egy szabályos pénzérmét. A az az esemény, hogy elsőre fejet dobunk, B az az esemény, hogy másodikra dobunk fejet, C pedig, hogy a dobások egyezők. Bizonyítsa be, hogy $\{A, B, C\}$ eseményrendszer bár páronként független eseményekből áll, teljesen nem független!
4. Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Az alábbi betűkkel jelöljük a következő eseményeket: $A = \{ \text{a dobott számok összege } 7 \}$, $B = \{ \text{legalább az egyik kockán van hatos} \}$, $C = \{ \text{mindkét kockával páratlant dobok} \}$, $D = \{ \text{a két kockával különböző számokat dobok} \}$, $E = \{ \text{a zöld kockával 4-est dobok} \}$.
Válaszoljuk meg a következő kérdéseket:
 - a) Függetlenek-e egymástól az A és C események?
 - b) Kizáróak-e az A és C események?
 - c) Mennyi a B esemény valószínűsége? És mennyi a B valószínűsége, feltéve, hogy A bekövetkezett?
 - d) Hogy viszonyul egymáshoz A és D ? Milyen következtetést vonhatunk le ebből a valószínűségeikre nézve? És a függetlenségekre nézve?

- e) Függetlenek-e egymástól az A és E események?
 f) Mindezek alapján mutassunk példát olyan eseményekre, amelyek
- i. függetlenek, de nem kizáróak,
 - ii. kizáróak, de nem függetlenek.

3. Valószínűségi változók, nevezetes eloszlások

1. *Indikátor eloszlás:*

Egyetlen A kísérletet végünk és azt nézzük, hogy hányszor következik be. Mivel egyetlen egyszer végezzük el a kísérletet, ezért a bekövetkezések számát X -szel jelölve két eset lehetséges: A bekövetkezik, azaz $X = 1$ vagy \bar{A} következik be, azaz $X = 0$. Ezekre a valószínűség legyen: $P(X = 1) = p$ és $P(X = 0) = 1 - p$
 Például: egy kockadobással kapcsolatban A a hatos dobás eseménye, akkor $P(A) = \frac{1}{6}$, vagyis $P(X = 1) = \frac{1}{6}$ és $P(X = 0) = \frac{5}{6}$.

2. *Egyenletes eloszlás:*

n érték közül mindegyik ugyanakkora valószínűséggel, vagyis $\frac{1}{n}$ valószínűséggel következik be. Például egy szabályos kockával való dobás értékei: $P(X = 1) = P(X = 2) = \dots = P(X = 6) = 1/6$

3. *Hipergeometrikus eloszlás:*

A piros, és B fehér golyó közül húzunk n darabot. Annak a valószínűsége, hogy pontosan k db piros golyót húzzunk ki:

$$P(X = k) = h_{A,B,n}(k) = \frac{\binom{A}{k} \binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}}$$

Például: A 2 találat valószínűsége az ötös lottón: $P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2} \binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$

4. *Binomiális eloszlás:*

Tipikus példa egy pénzdobás sorozatban a fejek száma. Ha n -szer dobtunk fel egy érmét, amely p valószínűséggel fej, akkor annak a valószínűsége, hogy pontosan k db fej van a dobások között:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Például: Pontosán 3 hatost dobunk 20 dobásból: $P(X = 3) = \binom{20}{3} (1/6)^3 (5/6)^{17}$

5. a) *Geometriai eloszlás (optimista):*

Hányadik dobásra jön elő az első hatos? $P(X = k) = (5/6)^{k-1} (1/6)$. Általánosabban: optimista $\text{GEO}(p)$ eloszlású az a valószínűségi változó, ami a siker első előfordulásáig szükséges kísérletek számát számolja (a sikeres kísérlettel együtt), ahol a független kísérletekben a siker valószínűsége p :
 $P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$.

b) *Geometriai eloszlás (pesszimista):*

Hányat dobok az első hatos dobás előtt? $P(X = k) = (5/6)^k (1/6)$. Általánosabban: pesszimista $\text{GEO}(p)$ eloszlású az a valószínűségi változó, ami az első sikerig bekövetkezett kudarcokat számolja, ahol a független kísérletekben a siker valószínűsége p : $P(X = k) = (1-p)^k p$.

6. a) *Negatív binomiális eloszlás (optimista):*

Hányadikra jön ki a harmadik hatos? $P(X = k) = \binom{k-1}{2} (1/6)^2 (5/6)^{k-3} (1/6) = \binom{k-1}{2} (1/6)^3 (5/6)^{k-3}$. Általánosabban: $\text{NBIN}(l, p)$: siker valószínűsége p , a valószínűségi változó azt számolja, hányszor kell a kísérlet elvégezni, hogy megkapjuk az l -edik sikert. $P(X = k) = \binom{k-1}{l-1} p^l (1-p)^{k-l}$

b) *Negatív binomiális eloszlás (pesszimista):*

Hányat dobok a harmadik hatos dobás előtt? $P(X = k) = \binom{k}{2} (1/6)^2 (5/6)^{k-2} (1/6) = \binom{k}{2} (1/6)^3 (5/6)^{k-2}$. Általánosabban: $\text{NBIN}(l, p)$: siker valószínűsége p , a valószínűségi változó azt számolja, hány kísérlet előzi meg az l -edik sikert. $P(X = k) = \binom{k}{l-1} p^l (1-p)^{k-l+1}$

Feladatok:

5. Addig dobunk két kockával, amíg a két kockán lévő számjegyek összege 12 nem lesz.
 - a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan nyolcszor dobunk 12-nél kisebb összeget, mielőtt kidobnánk a 12-t?
 - b) Mennyi a valószínűsége, hogy nyolcszor dobunk a kockákkal?
6. Egy (szabálytalan) pénzérmét dobunk fel annyiszor, amíg fejet nem kapunk. Ha a fej dobás valószínűsége p , akkor mennyi a valószínűsége, hogy
 - a) pont k -szor dobunk a fej előtt?
 - b) pont k -szor dobunk az érmevel?
7. 100 kulcs közül csak 1 nyitja az előttünk lévő ajtót. A sötétben nem látjuk, hogy melyik kulcsot próbáltuk már ki, így a próbálgatások során többször is a kezünkbe kerülhet ugyanaz kulcs. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozással kinyitjuk az ajtót? És ha a kipróbált kulcsokat félretesszük?
8. Dobogatok a kockával és vonásal számolom, hogy hány hatost dobtam. Mi a valószínűsége, hogy a 12. dobásra húzom a harmadik vonást? Ha azt számolnám ki, hogy mennyi a valószínűsége, hogy 12-szer dobok hatostól különbözőt, mire kidobom a harmadik hatost, akkor az az előző eredménytől különbözne?
9. Pisti nem tanult semmit a vizsgára, ahol 10 darab eldöntendő kérdésre kell válaszolnia. Az anyagból valami kicsi dereng, ezért kicsit több, mint 50%-os, mondjuk olyan 60%-os valószínűséggel ír jó választ egy-egy kérdésre. Milyen valószínűséggel megy át, ha a ketteshez 8 jó válasz kell?
10. Blicc úr minden nap villamossal megy dolgozni, de nincs bérlete, sem jegye. A villamosra minden nap 0,2 valószínűséggel száll fel ellenőr, és ilyenkor 0,95 valószínűséggel elkapja Blicc urat. (Az ellenőr minden nap az addigiaktól függetlenül dönti el, ellenőrzi-e aznap Blicc úr villamosát.)
 - a) Mennyi a valószínűsége, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" van, azaz az 5 munkanap egyikén sem kell büntetést fizetnie?
 - b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer kapják el egy hét munkanapjai alatt?
 - c) Feltéve, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" volt, mi a valószínűsége, hogy mind az ötször volt ellenőr a villamoson?
 - d) Mi a valószínűsége hogy csütörtökön büntetik meg másodszer?
11. Egy roszomák elindul a számegyenes origójából. Minden lépésnél $1/2$ valószínűséggel jobbra, $1/2$ valószínűséggel balra lép. 20 lépés megtétele után
 - a) milyen valószínűséggel lesz a 0-ban?
 - b) milyen valószínűséggel lesz az 1-ben?
 - c) milyen valószínűséggel lesz a (-2)-ben, ha az utolsó előtti lépés után a (-3)-ban volt?
12. Egy 30 fős osztályban 17 lány van. Véletlenszerűen kiválasztanak az osztályból egy 12 fős csapatot, egy vetéldőre. Legyen a csapatba került lányok száma X . $P(X = 7) = ?$
13. 80 üveg bor van egy borospincében össze-vissza ebből 30 fehér. A vendégek a fogadóstól 3 üveg fehér és 7 vörösbort rendelnek, de pincében kiégett a villany. A fogadós véletlenszerűen kiválaszt 10 üveget. Mi a valószínűsége, hogy minden vendég kap neki megfelelő itókát?
14. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme $3/4$ valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, $1/2$ eséllyel az igazságosat, $1/2$ eséllyel a cinkeltet. A kiválasztott érmét feldobom 30-szor, és azt tapasztalom, hogy 25-ször mutatott fejet. Mi a valószínűsége, hogy a cinkelt érmét vettem elő?

Házi feladat

15. Háromszor dobunk fel egy pénzérmét. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások száma között fej és írás is előfordul, B pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb 1 írás fordul elő. Függetlenek-e a fenti események egymástól?
16. A vidámparkban a céllövöldében játszom. Egymás után vonulnak fel a célpontok, mindegyiket egymástól függetlenül $2/3$ valószínűséggel eltalálom. Mennyi a valószínűsége, hogy 6 célzásból pontosan 4-et találok el? Mennyi a valószínűsége, hogy 2-nél többet találok el, de azért nem az összeset?
17. Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van.
18. Egy osztályban 22 tanuló van. Egy órára 8-an nem készültek, és 7-en felelnek. Adjuk meg a készületlen felelők számának eloszlását! Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 2 készületlen felelő lesz?
19. Egy gyárban az I. gépsor az idő 60%-ában a II. gépsor az idő 70%-ában dolgozik egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége hogy a) mindkét gép dolgozik, b) legalább az egyik dolgozik, c) csak az egyik gép dolgozik d) mindkét gép áll?
20. Egy gyárban futószalag szállítja az alkatrészeket. A futószalag leáll, ha selejtes termék érkezik. A termékek 2%-a selejtes. Mi az eloszlása annak a valószínűségi változónak, ami azt számolja, hogy
 - a) hányszor állt le a szalag az n -edik termékig (őt is beleértve)?
 - b) hány terméket gyártott a gép az n -edik leállásig?
 - c) hány terméket szállított két leállás között?
 - d) hány leállás történt egymás után anélkül, hogy egyetlen jó termék is keletkezett volna? (Selejtszéria hossza)
21. 400 hallgató mindegyike egymástól függetlenül 0.6 valószínűséggel jár órára. A teremben 200 db szék van.
 - a) Mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jut szék?
 - b) Hány szék kell, hogy biztosan (1 valószínűséggel) mindenkinek jusson szék?
 - c) Hány szék kell, hogy legalább 0,99 valószínűséggel jusson mindenkinek szék?
22. Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme $3/4$ valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, $1/2$ eséllyel az igazságosat, $1/2$ eséllyel a cinkeltet, és odaadom Nektek. 30 dobás után el kell döntenetek, melyik érme volt, amit elővettem. Hol húznátok meg a döntési határt? (A 30 dobás közül hány fej az a maximális, amikor még az igazságos érmére tippelnétek?)
23. Mi a valószínűsége, hogy 0,1,2,3,4,5 találatom lesz a LOTTÓ-n?
24. Mi a valószínűsége, hogy 11,12,13,13+1 találatom lesz a TOTÓ-n ha felteszem hogy minden választ $1/3$ valószínűséggel tudok?
25. Valaki egy LOTTÓ szelvénnel játszik. Legalább hány hétig kell játszania ahhoz, hogy a hármas, négyes, ötös valószínűsége legalább $1/2$ legyen? (Ez 3 különálló kérdés.)