Matematika B4
IV. gyakorlat
rövid megoldási útmutató

2005. március 10.

Az alábbi dokumentum a gyakorlaton elhangzott pár feladat megoldását tartalmazza, mivel a gyakrolaton elég kevesen tudtak megjelenni.

1. Bevezető kérdések

5. Annak a valószínűsége, hogy egy évben egyetlen repülőgép sem zuhan le 10%. Változatlan forgalmi viszonyokat feltételezve, mire tippel, hány repülőgép fog lezuhanni a következő évben.

   Sok repülőgépjárat indul egy évben, és mindegyik járatnál ott van egy kis esély, hogy az adott járat lezuhan. Ez egy nagy n-hez és kis p-hez tartozó binomiális eloszlás, aminél sem n-et, sem p-t nem tudjuk. Ezt Poisson eloszlással közelíthető, és ebben a példában mást nem is tudunk használni. (Íratlan szabály, hogy ahol látszólag kevés adat van, az Poisson lesz.)

   $X = \{$*Egy évben lezuhanó repcsik száma*$\}$

   $P(X = 0) = 0.1$ *a feladat szövege szerint, és a Poisson eloszlás képlete alapján:* $P(X = 0) = \dfrac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}$

   Ez a két érték megegyezik, innen következik, hogy $\lambda = log10 \approx 2,3$. *Ha* λ *egész, akkor a legvalószínűbb érték (szemléletesen a legmagasabb pálcika)* λ *és* $\lambda - 1$, *ha* λ *tört, akkor ez az érték* $\lfloor\lambda\rfloor$. *Vagyis az esetünkben a válsz:* $\lfloor 2,3 \rfloor = 2$. *Két repülő lezuhanása a legvalószínűbb 1 év alatt.*

2. Poisson eloszlás

Ha a X egy valós valószízűségi változó az $x_k = k$ (k=0,1,2,...) értékeket veheti fel és

$$P(X = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

ahol $\lambda > 0$ egy tetszőleges valós szám, akkor X eloszlását λ paraméterű Poisson-eloszlásnak nevezzük.
Feladatok:

5. Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van.

   Ez a feladatat kiszámolható binomiális eloszlással is, de mivel a 200 *már "nagy", a* 0.01 *pedig kicsi, ezért a nagy binomiális kifejezések számolása helyett számolhatunk Poissonnal, így nem fogunk pontos értéket kapni, ám a most kiszámolt hiba esetünkben 1 század alatt lesz.*
   Ha n*-edrendű* p *paraméterű binomiálist közelítünk Poissonnal, akkor* λ*-t* np*-nek kell választani. Esetünkben:*

   $X = \{$*200 ember közül a balkezesek száma*$\}$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3)$$
$$= 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} \approx 0.1429$$

6. Sok év statisztikája áll rendelkezésünkre arra nézve, hogy naponta hány lakástűz volt Budapesten. A napi négyes gyakoriság ugyanolyan valószínűséggel fordul elő, mint az ötös gyakoriság. Becsülje meg, hogy a napok körülbelül hány százalékában fordul elő a kettes gyakoriság.

   Az előzőekhez hasonlóan itt is meg lehet indokolni, hogy miért közelíthetünk Poisson eloszlással. (Sok lakás van, mindegyik nap mindegyik lakásban egy kis valószínűséggel üt ki tűz.)

   $$X = \{\textit{lakástüzek száma naponta}\}$$

   $$P(X=4) = P(X=5) \Rightarrow \frac{\lambda^4}{4!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^5}{5!}e^{-\lambda}$$

   Egyszerű átrendezés után kapjuk, hogy $\lambda = 5$. A kérdéses érték:

   $$P(X=2) = \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = \frac{25}{2}e^{-5} \approx 0.08422$$

7. Átlagosan hány szem mazsolának kell lennie egy sütiben ahhoz, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott sütiben 99%-os valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

   A sütiből sokat készítenek, és mindig egy jó nagy masszába dobják be a mazsolákat. Itt is használhatunk Poisson eloszlást. Egy λ paraméterű Poisson eloszlás várható értéke (erről később még lesz szó): λ. Ez azt jelenti, hogy ha a paraméter λ, akkor sok kísérlet átlaga λ-hoz fog tartani, vagyis átlagosan λ mazsola lesz egy sütiben. Azaz ha kiszámoltuk a megfelelő λ értéket, akkor az lesz a megoldás.

   $$X = \{\textit{egy kiválasztott sütiben lévő mazsolák száma}\}$$

   $$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} \geq 0.99 \Rightarrow \lambda \geq log100 \approx 4,6$$

   A fenti átalakításokat nem akarom részletezni. Csak át kell rendezni, és mindkét oldalt be kell szorozni 100-zal és e^{λ}-val. Tehát legalább $4,6$ db mazsolának kell egy sütire jutnia.

8. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhuba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több, mint egy sajtóhuba van? És annak, hogy az első 6 oldalon nincs egy sem?

   Poissonnal közelítünk. Nincs jelentősége, hogy a 13. oldalról van szó. Átlagosan fél sajtóhiba van egy lapon, vagyis $\lambda = 1/2$.

   $$P(\textit{A 13. oldalon lévő sajtóhibák száma} > 1) =$$

   $$1 - P(\textit{A 13. oldalon lévő sajtóhibák száma} = 0) - P(\textit{A 13. oldalon lévő sajtóhibák száma} = 1) =$$

   $$1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} \approx 0,090204$$

   6 oldalra $6\frac{1}{2} = 3$ átlagosan hibát "várunk", ezért ebben az esetben $\lambda_2 = 3$.

   $$\frac{{\lambda_2}^0}{0!}e^{\lambda_2} \approx 0,05$$

3. Várható érték

Ha X eloszlása: $P(X = x_i) = p_i$, akkor X várható értéke:

$$\sum_i x_i p_i \quad \text{, feltéve ha} \quad \sum_i |x_i|\, p_i < \infty$$

$t(X)$ várható értéke:

$$\sum_i t(x_i) p_i \quad \text{, feltéve ha} \quad \sum_i |t(x_i)|\, p_i < \infty$$

Feladatok:

9. A diszkrét X eloszlás tagjai: p(x)=$\frac{x^2}{30}$ (x=1,2,3,4). Mennyi az eloszlás várható értéke?

   A továbbiakban várható érték jelölésére m-et vagy $E(X)$-et fogok használni. Behelyettesítve a képletbe:

   $$E(X) = 1 \cdot \frac{1^2}{30} + 2 \cdot \frac{2^2}{30} + 3 \cdot \frac{3^2}{30} + 4 \cdot \frac{4^2}{30} = \frac{10}{3}$$

10. Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000Ft-os, 10 db 50 000Ft-os, és 100 db 5 000Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000db sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának a felével egyezzék meg?

    Számoljuk ki először a várható értéket, és a feladat szövege szerint ezt kell kettővel beszoroznunk. Arra a valószínűség, hogy 1 000 000 Ft-ot nyerünk $\frac{1}{40000}$, mivel a 40 000 db közül pontosan egy nyer. Arra az esély, hogy 50 000 Ft-ot nyerünk $\frac{10}{40000}$, mert a 40 000 db jegy közül pontosan 10-zel nyerhetünk ennyit, stb. A nyerhető értéket kell összeszorozunk a hozzájuk tartozó valószínűséggel, azaz a képlet:

    $$m = \frac{1}{40000} \cdot 1000000 + \frac{10}{40000} \cdot 50000 + \frac{100}{40000} \cdot 5000 = 50$$

    A képletből hiányzik a 0 Ft-hoz tartozó tag, de az úgyis nulla lesz. Tehát egy jegy 100 Ft-ba kerüljön.

11. Albert és Béla a következőt játszák. Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd Albert annyi Ft-t kap Bélától amennyi a két kockán lévő pontok különbségének a négyzete. Béla meg annyit, amennyi a két kockán lévő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék hosszú távon?

    (Egy lehetséges) megoldás vázlata: Egy 6x6-os táblán írjuk fel az összes esetet. Ezt tegyük meg mindkét esetben, úgy is, hogy Albert mennyi pénzt ad Bélának, és egy másik táblán, hogy Béla mennyi pénzt ad Albertnek. A felírt események mindegyike $\frac{1}{36}$ valószínűséggel fordul elő, ezért mindegyik értéket $\frac{1}{36}$-dal megszorozva és összeadva megkapjuk, hogy Béla "átlagosan" (sok játék után a Béla által kifizetett pénz ennyi körül stabilizálódna) $\frac{35}{6}$ Ft-ot ad Aladárnak, míg "átlagosan" 7 Ft-ot kap. Így Béla jár jobban.

14. Egy kockával addig dobunk, míg 6-ost nem dobunk. Mennyi lesz az addigi dobásszám várható értéke? És ha két kockával dobunk addig, amíg valamelyiken 6-ost nem dobunk?

    a) Feltéve hogy az utolsó dobást is beleszámítjuk?

       Mindkét esetben optimista geometriai eloszlásról van szó. Az órán levezetett képlet szerint a p paraméterű geometriai eloszlás várható értéke $\frac{1}{p}$. Az első esetben a siker valószínűsége egy dobásnál $\frac{1}{6}$, ennyi lesz a paraméter, tehát a várható érték 6 lesz, a második esetben a paraméter $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$, tehát a várható érték $\frac{36}{11} \approx 3,27$ lesz.

    b) Feltéve hogy az utolsó dobást nem számítjuk bele?

Vegyük észre, hogy a feladat majdnem ugyanaz. A különbség abból áll, hogy ha például harmadikra jön ki a hatos, akkor az első kérdés szerint 3-at számolunk, a második esetében csak kettőt. Az első kérdés átfogalmazva: "Hányadikra jön ki a hatos?", míg a második kérdés: "Hány kudarcot kell megélnem a hatos dobás előtt?". Nyílván a második esetben mindig eggyel kevesebbet kapunk. Ez utóbbi a pesszimista geometriai eloszlás. A várható értéknél egy szummát számolunk, ahol minden érték eggyel kisebb lett. Mivel ezeket az értékeket adjuk össze megfelelő súlyozással, ezért az összeg is eggyel kisebb lesz. Azaz a várható érték: $6 - 1 = 5$ *és* $\frac{36}{11} - 1 \approx 2,27$.

16. Egy dobozban 2 piros és 2 fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzunk az első pirosig, és jelöljük X-szel a húzások számát. Számoljuk ki: X, X^2, 2^X, $\frac{1}{2^X}$ várható értékét!

    Jelöljük X*-szel a szükséges húzások számát, azaz* $P(X = k) = P($*k-adikra húzzuk az első pirosat*$)$.

    $$P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

    $$P(X = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$$

    $$P(X = 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

    A képlet alapján a kérdéses értékek:

    $$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$$

    $$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{2}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{20}{6}$$

    $$E(2^X) = 2^1 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{2}{6} + 2^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{22}{6}$$

    $$E(\frac{1}{2^X}) = \frac{1}{2^1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{17}{4}8$$